หน่วยที่ 10 การทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับประชากร (Introduction to Population Hypothesis Testing)

10.1 หลักการทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับประชากร สมมุติฐาน (hypothesis) คือการเดาคำตอบของปัญหาหรือคำถามเหตุผลและกลยุทธอันแยบคาย การตอบปัญหาหรือคำถามด้วยวิธีตั้งสมมุติฐานนั้นสมมุติฐานจะจริงหรือไม่จริงจะต้องตรวจหรือมีการทดสอบตามกระบวนการที่เหมาะสม และเรียกกระบวนการนี้ว่า การทดสอบสมมุติฐาน (hypothesis testing or test of hypothesis) อย่างไรก็ตามผู้ตั้งสมมุติฐานจะตั้งใจไว้ว่า สมมุติฐานตั้งขึ้นเป็น สมมุติฐานว่างหรือสมมุติฐานที่น่าจะจริง (null hypothesis) นิยมใช้สัญลักษณ์ H_o จนกว่าจะมีสมมุติฐานอื่นที่มีเหตุผลเพียงพอสำหรับการตัดสินใจ (decision making) ยอมรับหรือปฏิเสธ H_o (accept or reject H_o) นิยมเรียกสมมุติฐานหลังนี้ว่า สมมุติฐานเลือกหรือสมมุติฐานแย้ง (alternative hypothesis) ใช้สัญลักษณ์ H_1 หรือ H_a

(1)ลำดับขั้นของการทดสอบสมมุติฐาน เมื่อจะดำเนินการทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับพารามิเตอร์จะมีลำดับขั้นตอนในการดำเนินการทดสอบสมมุติฐานดังต่อไปนี้

ขั้นที่ 1 ตั้งสมมุติฐานว่างและตั้งสมมุติฐานแย้งดังนี้

1) ตั้ง H_o โดยตั้งสมมุติฐานว่าพารามิเตอร์ของประชากร (θ) เท่ากับตัวสถิติที่ประมาณไว้ (θ_0) จะได้

$$H_o: \theta = \theta_0$$

2) ตั้ง H_1 โดยจะเลือกได้จาก 3 ลักษณะ ดังนี้

$$H_1: \theta < \theta_0$$

หรือ $$H_1: \theta > \theta_0$$

หรือ $$H_1: \theta \neq \theta_0$$

ขั้นที่ 2 กำหนดระดับ α ขนาดการทดสอบ หรือ ระดับนัยสำคัญ

ขั้นที่ 3 กำหนดตัวสถิติทดสอบและตั้งขอบเขตหรือตั้งเกณฑ์การตัดสินใจ ตัวสถิติที่จะเลือกนั้นจะต้องเป็นตัวสถิติที่มีการแจกแจงเหมาะสมและสอดคล้องกับ พารามิเตอร์นั้น ๆ เช่น การแจกแจงปรกติหรือการแจกแจงที เหมาะสมกับการทดสอบเกี่ยวกับ μ เป็นต้น แล้วแบ่งเขตการยอมรับ H_0 และ เขตปฏิเสธ H_0 โดยบอกขนาดของเขตปฏิเสธ H_0 ด้วยระดับนัยสำคัญ α สำหรับความผิดพลาดชนิดที่ 1 (type I error) หรือบอกขนาดของเขตยอมรับ H_0 ด้วยระดับนัยสำคัญ β สำหรับความผิดพลาดชนิดที่ 2 (type II error) การวางเขตปฏิเสธ H_0 จะวางไว้ทางส่วนหางของการแจกแจงซึ่งมีการวาง 3 ลักษณะขึ้นอยู่กับ สมมุติฐานทางเลือก H_1 ว่าจะกล่าวแย้งในทิศทางใดอันถือเป็นการกำหนดทิศทางของการทดสอบด้วย กล่าวคือ

กรณี $$H_1: \theta < \theta_0$$

ดังแสดงในภาพ 10.1 (ก) เป็นการทดสอบหางเดียวทางซ้าย (one-tailed test : left)

สำหรับกรณีที่ $$H_1: \theta > \theta_0$$

ดังแสดงในภาพ 10.2 (ข) เป็นการทดสอบหางเดียวทางขวา (one-tailed test : right)

และในกรณี $H_1 : \theta \neq \theta_0$

แสดงในภาพ 10.2 (ค) เป็นการทดสอบสองหาง (two-tailed test)

ขั้นที่ 4 คำนวณค่าตัวสถิติทดสอบ เช่น คำนวณค่า Z หรือ Z_C คำนวณค่า t หรือ t_C เป็นต้น

ขั้นที่ 5 ถ้าตัวสถิติที่คำนวณได้จากขั้นที่ 5 ตกอยู่ในเขตปฏิเสธ H_0 หรือตกอยู่ในเขตวิกฤตเราจะตัดสินใจปฏิเสธ H_0 ที่ระดับ α แต่ถ้าตัวสถิติที่คำนวณได้จากขั้นที่ 5 ไม่ตกอยู่ในเขตวิกฤต แสดงว่าตัวสถิติไม่เอื้ออำนวยหรือไม่มีหลักฐานเพียงพอในการปฏิเสธ H_0 ระดับ α หรือต้องยอมรับ H_0 ที่ระดับ α เช่น ต้องการทดสอบสมมุติฐาน ที่ระดับ α = .05

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

ถ้าตัวสถิติที่คำนวณได้ตกอยู่ในเขตวิกฤต เราจะต้องปฏิเสธ H_0 ที่ระดับ α = .05 หมายความว่า θ สมมุติฐานของประชากรไม่เท่ากับ θ_0 สมมุติฐานที่ตั้งไว้ที่ช่วงความเชื่อมั่น 95% หรือเชื่อได้ 95%

(2)**การทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยประชากร** ค่าเฉลี่ยประชากรในที่นี้จะหมายถึงประชากรเดียวและมีค่าเฉลี่ยเพียงตัวเดียว การแจกแจงค่าเฉลี่ยตัวอย่าง ($\bar{X}$) จะเป็นตัวสถิติสำคัญในการทดสอบ โดยจะกำหนดให้ ค่าเฉลี่ยประชากรมีค่าเท่ากับค่าคงตัวค่าหนึ่ง เมื่อ

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

ที่ μ_0 เป็นค่าเฉลี่ยประชากรที่ตั้งไว้ว่าน่าจะเป็นจริง ซึ่งนิยมแสดงเป็นตัวเลข ค่าเฉลี่ย ตัวอย่างจะกระจายอยู่รอบ ๆ μ_0

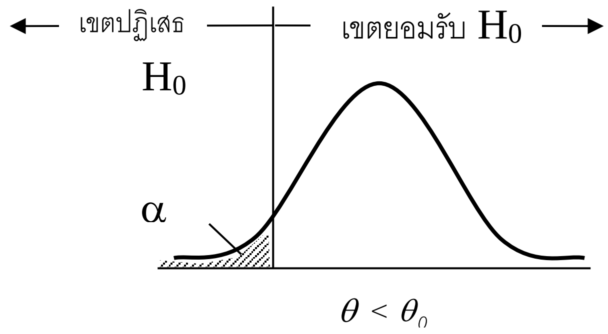
ในกรณีที่ประชากรแจกแจงปรกติหรือตัวอย่างขนาดใหญ่ และทราบค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานประชากร (σ) ตัวสถิติทดสอบ จะได้สมการ (4-31)

$$Z_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \qquad \ldots(10\text{-}1)$$

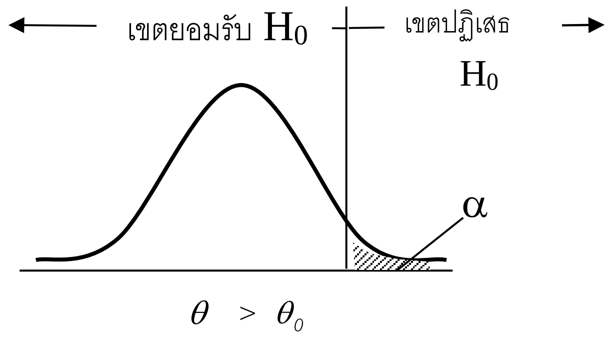
กรณีประชากรแจกแจงปรกติและไม่ทราบค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานประชากร (σ) จะประมาณค่านี้ด้วยค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานตัวอย่าง (s) ตัวสถิติทดสอบ คือ

$$t_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \qquad \ldots(10\text{-}2)$$

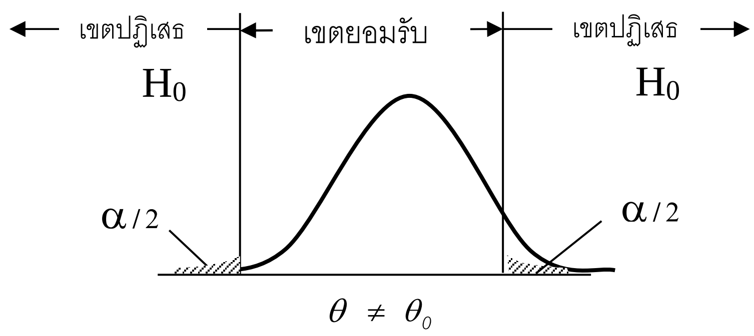
โดยที่ Z หรือ t จะกระจายอยู่รอบ ๆ ศูนย์ ซึ่งตรงกับจุดที่ $\bar{X} = \mu = \mu_0$



(ก)



(ข)



(ค)

ภาพ 10.1 ทิศทางการทดสอบสมมุติฐาน ที่ระดับ α

ตัวอย่าง 10.1 จงทดสอบว่าน้ำหนักลูกไก่อายุหนึ่งวันเป็น 12 กรัม หรือไม่ที่ระดับ $\alpha = .05$ ตัวอย่างสุ่มเป็นน้ำหนักลูกไก่อายุหนึ่งวันจำนวน 15 ตัว ดังนี้ 11.8, 11.8, 11.9, 12.1, 11.9, 11.9, 12.1, 12.0, 12.1, 12.1, 12.2, 12.3, 12.3, 12.4 และ 12.4 กรัม

วิธีทำ กำหนด μ น้ำหนักลูกไก่อายุหนึ่งวันทั้งหมดโดยเฉลี่ย

ค่าเฉลี่ยตัวอย่าง: $\bar{X}$ = (11.8 + 11.8 + 11.9 +.......+ 12.4 + 12.4)/15 = 12.1 กรัม

ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานตัวอย่าง : S

$S^2 = (11.8-12.1)^2 + (11.8-12.1)^2 + ...+ (12.4-12.1)^2 + (12.4-12.1)^2/14 = 0.04$

$S = \sqrt{0.04} = 0.2$

ดำเนินการทดสอบสมมุติฐาน

ขั้นที่ 1 $H_0 : \mu = 12.0$

$H_1 : \mu \neq 12.0$

ขั้นที่ 2 ระดับนัยสำคัญ, $\alpha = .05$

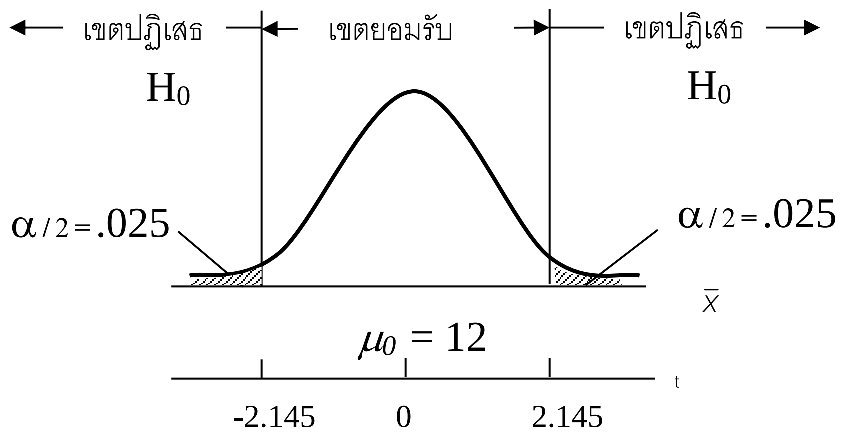
ขั้นที่ 3 สมมุติฐานเกี่ยวกับ μ ของประชากร กรณีนี้ ตัวอย่างขนาดเล็ก ประมาณค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานประชากรด้วยค่าด้วยค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานตัวอย่าง (S) และประชากรแจกแจงปรกติโดยประมาณ ตัวสถิติทดสอบคือ t_c และเป็นการทดสอบสองหาง ที่ระดับ $\alpha = .05$, $\alpha/2 = .025$, จากตารางภาคผนวกที่ 6 $df = 14$, $t_{.025,14} = 2.145$ ดังนั้นเขตปฏิเสธ H_0 คือ $t_c < -2.145$ หรือ $t_c > 2.145$ ตามภาพ 10.2

ขั้นที่ 4 คำนวณค่าตัวสถิติทดสอบ : t_c

$$t_c = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$t_c = \frac{12.1 - 12.0}{\frac{0.2}{\sqrt{15}}}$$

$$t_c = 1.94$$



ภาพ 10.2 **ทิศทางการทดสอบสมมุติฐานที่ระดับ α = .05 ของน้ำหนักลูกไก่**

ขั้นที่ 5 ตัดสินใจยอมรับ H_0 เพราะ $t_c < 2.14$ ตกอยู่ในเขตยอมรับ H_0 ที่ระดับ $\alpha = .05$ นั่นคือ ยอมรับน้ำหนักลูกไก่อายุหนึ่งวันทั้งหมดเป็น 12 กรัม ที่ระดับ $\alpha = .05$ เชื่อได้ 95%

(3)**การทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยประชากรสองประชากร** หากประชากรแรกมีค่าเฉลี่ย μ_1 ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ_1 ส่วนประชากรหลังมี ค่าเฉลี่ย μ_2 ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน σ_2 สมมุติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยประชากรทั้งสองนี้ คือ

$H_0 : \mu_1 = \mu_2$ (หรือ $\mu_1 - \mu_2 = 0$)

$H_1 : \mu_1 > \mu_2$ (หรือ $\mu_1 - \mu_2 > 0$)

หรือ $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ (หรือ $\mu_1 - \mu_2 < 0$)

หรือ $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ (หรือ $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$)

ในกรณีที่มี 2 ตัวอย่างอิสระกัน ตัวอย่างจากประชากรทั้งสองมีขนาดใหญ่ (n_1, $n_2 \geq 20$) และทราบค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานประชากร (σ_1, σ_2). ตัวสถิติทดสอบ จะเป็นดังสมการ (10-3)

$$Z_c = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad \ldots(10\text{-}3)$$

ที่ $\mu_1 = \mu_2$ หรือ $\mu_1 - \mu_2 = 0$

$$\sigma_{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

และกรณีไม่ทราบค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานประชากร (σ_1, σ_2) เราจะประมาณด้วยค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานตัวอย่าง (S_1 , S_2) ตัวสถิติทดสอบ เป็นดังสมการ (10-4)

$$t_c = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \qquad \ldots(10\text{-}4)$$

ตัวอย่าง 10.2 สุ่มชั่งน้ำหนักไก่กระทง 2 พันธุ์ที่เลี้ยงด้วยอาหารชนิดเดียวกันเป็นเวลาสามสิบวัน โดยสุ่มชั่งน้ำหนักไก่พันธุ์ ก. จำนวน 100 ตัว หาค่าน้ำหนักเฉลี่ยได้ 952 กรัม ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 85 กรัม สุ่มชั่งไก่พันธุ์ ข. จำนวน 50 ตัว หาค่าน้ำหนักเฉลี่ยได้ 987 กรัม, ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 92 กรัม จงทดสอบความแตกต่างน้ำหนักของไก่ 2 พันธุ์นี้ที่ระดับ $\alpha = .05$

วิธีทำ กำหนด μ_1 ค่าเฉลี่ยน้ำหนักไก่พันธุ์ ก. ทั้งหมด

μ_2 ค่าเฉลี่ยน้ำหนักไก่พันธุ์ ข. ทั้งหมด

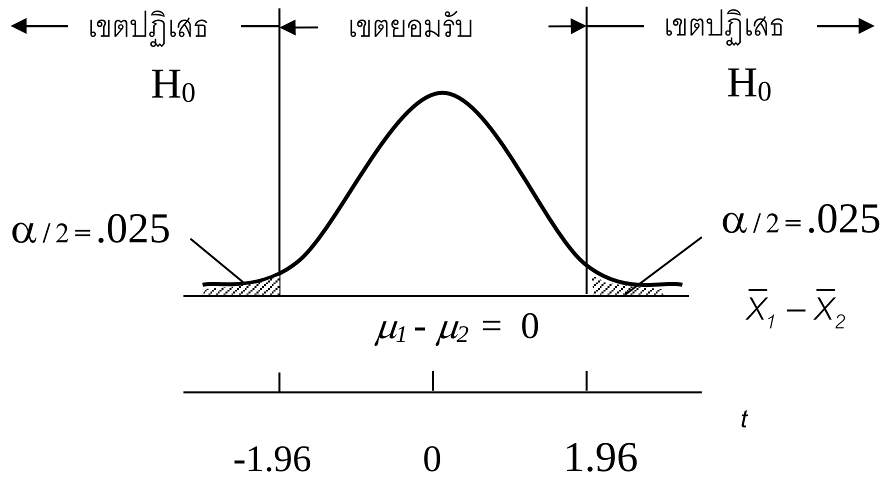
ดำเนินการทดสอบสมมุติฐาน

ขั้นที่ 1 H_0 : $\mu_1 = \mu_2$

H_1 : $\mu_1 \neq \mu_2$

ขั้นที่ 2 ระดับนัยสำคัญ α = .05 , $\alpha/2$ = .025

ขั้นที่ 3 สมมุติฐานเกี่ยวกับความแตกต่างของค่าเฉลี่ย 2 ประชากร (μ_1-μ_2) เมื่อตัวอย่างจากประชากรทั้ง 2 มีขนาดใหญ่ (n_1, $n_2 \geq 20$) แต่การประมาณค่าความแปรปรวนกับประชากรทั้งสอง ตัวสถิติทดสอบคือ t_c และเป็นการทดสอบสองหาง ที่ระดับ α = .05 จากตารางภาคผนวกที่ 6 และในตารางภาคผนวกที่ 5 เมื่อ df มีค่าอนันต์ ค่า $Z_{.025}$ = 1.96 ดังนั้น เขตปฏิเสธ H_0 คือ $t_c <$ -1.96 หรือ $t_c >$ 1.96



ภาพ 10.4 **ทิศทางการทดสอบสมมุติฐานที่ระดับ α = .05 ของน้ำหนักไก่กระทง 2 พันธุ์**

ขั้นที่ 4 คำนวณตัวสถิติทดสอบ : t_c

$$t_c = \frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}}$$

เมื่อ $\bar{X}_1$ = 952, n_1 = 100, $S_1^2 = 85^2$

$\bar{X}_2$ = 987, n_2 = 50, $S_2^2 = 92^2$

$$t_c = \frac{(952-987)}{\sqrt{\frac{85^2}{100}+\frac{92^2}{50}}} = \frac{35}{15.5} = -2.26$$

ขั้นที่ 5 ตัดสินใจปฏิเสธ H_0 เพราะ $t_c <$ -1.96 ตกอยู่ในเขตปฏิเสธ H_0 ที่ระดับ α = .05

นั่นคือ น้ำหนักไก่กระทงทั้ง 2 พันธุ์นี้เลี้ยงด้วยอาหารชนิดเดียวกันเป็นเวลาสามสิบวัน น้ำหนักแตกต่างกันที่ระดับ α = .05 (เชื่อได้ 95%)

10.2 ผลการประมาณค่าและทดสอบสมมุติฐานจากโปรแกรมสำเร็จรูปสถิติ

ตัวอย่าง 10.3 การใช้โปรแกรมสำเร็จรูปสถิติ สามารถประมาณค่าและทดสอบสมมุติฐานเกี่ยวกับค่าเฉลี่ยประชากรได้ เช่น สมมุติต้องการประมาณค่า payment ของประชากรควรเป็น 121 บาทเศษต่อวันตามค่าเฉลี่ยตัวอย่างหรือไม่ ต้องการประมาณค่าเฉลี่ยประชากรนี้ด้วยช่วงความเชื่อมั่นร้อยละ 95 พร้อมกับทดสอบสมมุติฐาน

$H_0 : \mu = 120.62$

$H_1 : \mu_0 \neq 120.62$

One-Sample Statistics

	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
PAYMENT	8	121.6250	26.8273	9.4848

One-Sample Test

	Test Value = 0					
					95% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Lower	Upper
PAYMENT	12.823	7	.000	121.6250	99.1969	144.0531

การอ่านค่าประมาณและการทดสอบค่าเฉลี่ยประชากรเดียว จากตาราง ประมาณค่าเฉลี่ยรายจ่ายประชากรเป็น 121บาทต่อวัน และประมาณที่ช่างความเชื่อมั่นร้อยละ 95 ระหว่าง 99 ถึง 144 บาท และปฏิเสธสมมุติฐาน H_0 เพราะค่า sig น้อยกว่า .05 หรือค่า t_c ตกอยู่ในเขตปฏิเสธ H_0

ตัวอย่าง 10.4 ผลการเลี้ยงกระต่าย 2 อาคาร

	อาคารที่ 1	**อาคารที่ 2**

Mean	49	55.8
Variance	7.5	10.2
Observations	5	5
Pooled Variance	8.85	
Hypothesized Mean Difference	0	
Df	8	
t Stat	-3.614159223	
P(T<=t) one-tail	0.00342014	
t Critical one-tail	1.85954832	
P(T<=t) two-tail	0.00684028	
t Critical two-tail	2.306005626	

อ่านผล ค่าเฉลี่ยตัวอย่างที่1 ($\overline{X}_1$) = 49 ความแปรปรวนตัวอย่างที่1 (S_1^2) = 7.5 ขนาดตัวอย่างที่1(n_1) = **5** ค่าเฉลี่ยตัวอย่างที่2($\overline{X}_2$)= 55.8 ความแปรปรวนตัวอย่างที่2 (S_2^2) = 10.2 ขนาดตัวอย่างที่2 (n_2) = **5** และ S_p^2 = 8.85

-การประมาณค่า

$\mu_1 \approx$ 49 , $\sigma_1^2 \approx$ 7.5

$\mu_2 \approx$ 55.8 , $\sigma_2^2 \approx$ 10.2

-การทดสอบสมมุติฐาน

H_0 : $\mu_1 = \mu_2$

H_1 : $\mu_1 \neq \mu_2$

t_c = -3.614159223 **ค่า Sig =** 0.00684028

กรณีนี้ตัดสินใจปฏิเสธ H_0 **แสดงว่ากระต่ายที่เลี้ยง 2 อาคารนี้เจริญเติบโตต่างกัน**

++++