หน่วยที่ 9 การประมาณค่าเกี่ยวกับประชากร (Introduction to Population Estimate)

งานหลักของสถิติอนุมานคือการหาข้อสรุปเกี่ยวกับคุณลักษณะเฉพาะของประชากร (characteristics of parameter) โดยอาศัยตัวสถิติจากตัวอย่างเพื่อประมาณค่าเกี่ยวกับประชากรภายใต้หลักการดำเนินการเกี่ยวกับพารามิเตอร์ ซึ่งมีหลักวิธีการประมาณค่าเชิงสถิติพารามิเตอร์ และการทดสอบสมมุติฐาน ในสาระที่จะกล่าวต่อไปนี้เป็นการประมาณค่าเชิงสถิติพารามิเตอร์ (parameter statistics or statistical estimation) เป็นรูปแบบการประมาณค่าด้วยค่าคงตัวหรือการประมาณค่าแบบจุด (point estimation) และการประมาณค่าด้วยช่วง (interval estimation) หรือช่วงความเชื่อมั่น (confidence interval) รวมถึงกระบวนการทดสอบสมมุติฐาน

9.1 หลักการประมาณค่าแบบจุด (point estimation)

ตัวประมาณค่าพารามิเตอร์ที่ดี (good estimator)จะต้องเข้าเกณฑ์อย่างน้อย 1 เกณฑ์คือ (1)เกณฑ์ความแนบนัย (consistency estimator) คือค่าตัวสถิติ ($\hat{\theta}$) จะต้องเข้าใกล้คุณลักษณะเฉพาะของประชากร (θ) เมื่อ n มีขนาดใหญ่ ๆ ขึ้น (2)เกณฑ์ประสิทธิภาพ (efficiency estimator) คือหากตัวสถิติตัวใดมีความแปรปรวนน้อยถือว่าตัวสถิติตัวนั้นมีประสิทธิภาพมากกว่า เช่น $V(\overline{X}) = \dfrac{\sigma^2}{n}$ แต่ $V(Me) = \dfrac{\pi\sigma^2}{2n}$ ซึ่งมากกว่า $V(\overline{X})$ประมาณ 1.57 จะเรียกว่าตัวสถิติ $\overline{X}$ มีประสิทธิภาพมากกว่าตัวสถิติ Me (3)เกณฑ์ความเพียงพอ (sufficiency estimator) คือตัวสถิตินั้นจะต้องใช้ได้กับพารามิเตอร์ทุกตัวของประชากรได้มีหลายประการ และเกณฑ์ที่เด่นที่สุดคือ (4)เกณฑ์ความไม่อคติ (unbiased estimator) เมื่อใช้ตัวสถิติเป็นตัวประมาณค่าคุณลักษณะประชากรจะไม่อคติสำหรับการประมาณค่า θ ถ้าค่าคาดหมายของ $\hat{\theta}$ คือ θ ซึ่งเขียนได้ตามสมการ (4-1) (Wonnacott & Wonnacott,1985, p. 161)

$$E(\hat{\theta}) = \theta \qquad \text{…(9-1)}$$

(1)การประมาณค่าเฉลี่ยประชากร (population mean estimation) ถ้า $\overline{X}$ ของ $X_1, X_2,$ ....X_n ที่มีตัวอย่างจำนวน n ค่า จากประชากรที่มีความน่าจะเป็นของ X เท่ากันทุกค่า จะได้

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{\sum X}{n}\right)$$

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n} E \sum X$$

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n} . E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n} .[E(X_1) + E(X_2) + \ldots + E(X_n)]$$

$$E(\overline{X}) = \frac{1}{n} [\, n\, E(X)\,]$$

$$E(\overline{X}) = E(X) = \mu$$

ดังนั้นค่าเฉลี่ยตัวอย่าง ($\overline{X}$) เป็นตัวประมาณค่า μ ของประชากร ได้ตามสมการ (9-2) เข้าเกณฑ์ $\overline{X}$ เป็นตัวประมาณค่าไม่อคติสำหรับ μ

$$\overline{X} \approx \mu \qquad \ldots(9\text{-}2)$$

(2)การประมาณค่าความแปรปรวนและค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานประชากร (population variance and standard deviation estimation) ความแปรปรวนประชากร จะหาได้จาก $\sigma^2 = \frac{\sum (x-\mu)^2}{M}$ โดย X คือ ค่าสังเกตประชากร และ μ คือค่าเฉลี่ยประชากรขนาด M

กรณีตัวอย่างสุ่มขนาด n ได้ X_1 , X_2 , ..., X_n มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ $\overline{X}$ กรณีไม่ทราบค่าเฉลี่ยประชากรสามารถประมาณค่า μ ด้วยค่า $\overline{X}$ ได้ตามเกณฑ์ความไม่อคติดังที่กล่าวมาแล้ว ในทำนองเดียวกันถ้าไม่ทราบค่าความแปรปรวนประชากร(σ^2) จะใช้ความแปรปรวนตัวอย่าง (sample variance) สัญลักษณ์ S^2 (สำหรับค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานตัวอย่างใช้สัญลักษณ์ S)ตามสมการ (9-3) แต่พบว่า $E(S^2) \neq \sigma^2$ เมื่อใช้สมการ (9-4) พบว่า $E(S^2) = \sigma^2$ แสดงว่าสามารถใช้ S^2 แทนได้ตามเกณฑ์ความไม่อคติสำหรับ σ^2

$$S^2 = \frac{\sum (x-\overline{x})^2}{n} \qquad \ldots(9\text{-}3)$$

$$S^2 = \frac{\sum (x-\overline{x})^2}{n-1} \qquad \ldots(9\text{-}4)$$

ดังนั้นความแปรปรวนตัวอย่าง (S^2) เป็นตัวประมาณค่าความแปรปรวนประชากร (σ^2) ได้เป็นสมการ (9-5) เข้าเกณฑ์ S^2 เป็นตัวประมาณที่ดีตามเกณฑ์ความไม่อคติสำหรับ σ^2

$$S^2 \approx \sigma^2 \qquad \ldots(9\text{-}5)$$

และ ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานตัวอย่าง (S) เป็นตัวประมาณค่าตามเกณฑ์ความไม่อคติสำหรับค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ) ตามสมการ (9-6)

$$S \approx \sigma \qquad \ldots(9\text{-}6)$$

(3) การประมาณค่าเฉลี่ยแตกต่างของสองประชากร (two population mean estimation) หากเรากำลังสนใจประชากร 2 ประชากร โดยประชากรแรกมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ_1 ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ σ_1 ส่วนประชากรหลังมีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ_2 ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ σ_2 (โดยทั่วไปจะไม่ทราบค่า) ค่าเฉลี่ยแตกต่างกันของ 2 ประชากรนี้คือ (μ_1-μ_2) เมื่อตัวอย่างสุ่มขนาด n_1, n_2 จาก ประชากรแรกและประชากรหลัง ตัวอย่างสุ่มจะมีค่าเฉลี่ยแตกต่างกันเป็น ($\overline{X}_1$-$\overline{X}_2$) ซึ่งในที่นี้จะกล่าวถึงใน***กรณีสองตัวอย่างอิสระกัน*** (independent sample) ตัวอย่างอิสระกันหมายถึงค่าสังเกตของตัวอย่างขนาด n_1 ไม่เกี่ยวข้องหรือมีผลกระทบต่อค่าสังเกตของตัวอย่างขนาด

n_2 ค่าผิดพลาดมาตรฐาน (standard error) ของ $\bar{X}_1$ และ $\bar{X}_2$ คือ $\sigma_{\bar{x}_1} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1}}$ และ

$V(\bar{X}_1) = \frac{\sigma_1^2}{n_1}$

$$\sigma_{\bar{x}_2} = \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2}} \quad \text{และ} \quad V(\bar{X}_2) = \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

จะได้

$$\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \qquad \text{...(9-7)}$$

จาก $V(aX) = a^2 V(X)$

จะได้ $V(aX+bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y)$

ถ้า $a = 1$, $b = (-1)$ จะได้

$$V(X-Y) = (1)^2 V(X) + (-1)^2 V(Y)$$

เมื่อ $V(X) = V(\bar{X}_1)$, $V(Y) = V(\bar{X}_2)$

และ $$V(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} \qquad \text{...(9-8)}$$

โดย $\sigma_{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}$ เป็นค่าผิดพลาดมาตรฐานของการแจกแจง $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$

ทำนองเดียวกับกรณีค่าเฉลี่ยประชากรเดียวและการแจกแจงปกติของตัวสถิติ $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ สามารถแสดงให้เห็นได้ว่า $E(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) = (\mu_1 - \mu_2)$ ดังนั้นค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)$ เป็นตัวประมาณค่า $(\mu_1 - \mu_2)$ ของประชากรได้เป็นสมการ (4-9) ตามเกณฑ์ความไม่อคติสำหรับ $(\mu_1 - \mu_2)$

$$(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) \approx (\mu_1 - \mu_2) \qquad \text{...(9-9)}$$

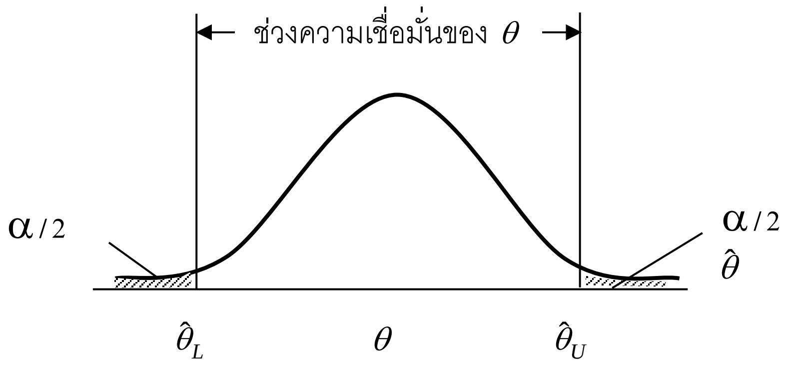
9.2 หลักการประมาณค่าด้วยช่วงความเชื่อมั่น (interval estimation)

การแจกแจงตัวสถิติในลักษณะแบบการแจกแจงใด ๆ ก็ตาม ถ้ากำหนดให้ $(1-\alpha)$ เป็นความน่าจะเป็นระหว่างตัวสถิติค่าต่ำ ($\hat{\theta}_L$) กับตัวสถิติค่าสูง ($\hat{\theta}_U$) ซึ่งมีพารามิเตอร์ (θ) ปนอยู่ด้วยดังภาพ 4.1 (กรณีตัวสถิติแจกแจงปกติ) จะได้ความสัมพันธ์เป็นดังสมการ (4-11)

$$P(\hat{\theta}_L < \theta < \hat{\theta}_U) = 1-\alpha \qquad \text{...(9-10)}$$

ช่วงระหว่าง $\hat{\theta}_L$ กับ $\hat{\theta}_U$ เรียกว่า ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ (confidence interval of parameter or C. I. of θ) หรือ ขอบเขตความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ตัวนั้น โดยทั่วไปนิยมกำหนดช่วงความเชื่อมั่นเป็นร้อยละ จะได้เป็นสมการ (9-11)

$$\text{C.I. ของ } \theta \quad = \quad 100\,(1-\alpha)\,\%\text{ ของ } \theta \qquad \ldots(9\text{-}11)$$



ภาพ 9.1 ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ (θ)

ความน่าจะเป็น (1-α) เรียกว่า ระดับความเชื่อมั่น (confidence level) หรือสัมประสิทธิ์ความเชื่อมั่น (coefficient of confidence) สำหรับความน่าจะเป็นส่วนปลายหาง α เรียกว่า ระดับนัยสำคัญ (significance level) ขนาดของการทดสอบ (size of test)หรืออื่นๆ พิจารณาภาพ 9.1 จะพบว่า ช่วงความเชื่อมั่นของพารามิเตอร์ตัวใดก็ตาม ต้องกำหนด α ล่วงหน้าก่อนแล้วแบ่งความน่าจะเป็น α ออกเป็น 2 ส่วนเท่า ๆ กัน ให้อยู่ทางส่วนหางทางซ้ายและขวาของการแจกแจงตัวสถิติตัวนั้น ในทางปฏิบัตินักสถิติและนักวิจัยจะกำหนดระดับนัยสำคัญ โดยเฉพาะในกระบวนการทดสอบสมมุติฐานเป็น 3 ระดับ คือ

(1)กำหนด α = .01 เรียกว่า มีนัยสำคัญยิ่ง (high significance) และใช้เครื่องหมาย ** (ดอกจัน 2 ดอก) สำหรับการประมาณค่าหรือการทดสอบครั้งนั้น

(2)กำหนด α = .05 เรียกว่า มีนัยสำคัญ (significance) และใช้เครื่องหมาย * (ดอกจัน 1 ดอก) สำหรับการประมาณค่าหรือการทดสอบครั้งนั้น

(3)กำหนด α > .05 เรียกว่า ไม่มีนัยสำคัญ (non-significance) และใช้ เครื่องหมาย *ns*

(1)การประมาณค่าเฉลี่ยประชากรด้วยช่วงความเชื่อมั่น

จากช่วงความเชื่อมั่น 95% ของ θ อยู่ระหว่าง Z เท่ากับ -1.96 กับ 1.96 ตามสมการ (9-12)

$$-1.96 \;<\; \frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \;<\; 1.96 \qquad \ldots(9\text{-}12)$$

คูณตลอดด้วย $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$$-1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;<\; \bar{x}-\mu \;<\; 1.96\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

แล้วนำ $\overline{X}$ มาลบออกจากแต่ละเทอมและคูณด้วย (-1) จะได้ตามสมการ (9-13) เป็นช่วงความเชื่อมั่น 95 % ของ μ

$$\overline{X} - 1.96\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + 1.96\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \ldots(9\text{-}13)$$

ที่ระดับ α อื่น ๆ (รวมถึงช่วงความเชื่อมั่นอื่น ๆ ด้วย) สามารถเขียนสมการ (9-13) ได้เป็น สมการ (9-14) หรือสมการ (9-15) ช่วงความเชื่อมั่น 100 (1- α) % ของ μ

$$\mu = \overline{X} \pm (Z_{\alpha/2})\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \ldots(9\text{-}14)$$

หรือ

$$\overline{X} - (Z_{\alpha/2})\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + (Z_{\alpha/2})\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \ldots(9\text{-}15)$$

กรณีไม่ทราบค่า σ ของประชากรจึงต้องประมาณค่า σ ของประชากรด้วยค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานตัวอย่าง (S) หรือตัวอย่างขนาดเล็กสมการ (4-16) จะเขียนได้ตามสมการ (9-16) เป็นช่วงความเชื่อมั่น 100 (1- α) % ของ μ

$$\overline{X} - (t_{\alpha/2,\mathrm{df}})\ \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + (t_{\alpha/2,\mathrm{df}})\ \frac{S}{\sqrt{n}} \qquad \ldots(9\text{-}16)$$

ตัวอย่าง 9.1 สุ่มชั่งน้ำหนักรถบรรทุกสินค้าที่วิ่งผ่านถนนลพบุรี–สิงห์บุรี จำนวน 120 คัน พบว่ามีน้ำหนักเฉลี่ย 25 ตัน, ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 1.75 ตัน จงประมาณน้ำหนักเฉลี่ยรถบรรทุกสินค้าที่วิ่งผ่านถนนสายนี้ทั้งหมดที่เชื่อได้ 95%

วิธีทำ กำหนด μ เป็นน้ำหนักเฉลี่ยรถบรรทุกสินค้าทั้งหมวดที่วิ่งผ่านถนนสายลพบุรี–สิงห์บุรี

ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของ μ คือ

$$\overline{X} - (t_{\alpha/2,\mathrm{df}})\ \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + (t_{\alpha/2,\mathrm{df}})\ \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$\overline{X} = 25,\ S = 1.75,\ n = 120,\ t_{.025,120} = 1.96$$

ดังนั้น

$$25 - 1.96\ \left(\frac{1.75}{\sqrt{120}}\right) < \mu < 25 + 1.96\ \left(\frac{1.75}{\sqrt{120}}\right)$$

และ

$$24.6868 < \mu < 25.3132$$

นั่นคือ น้ำหนักเฉลี่ยรถบรรทุกสินค้าทั้งหมดที่วิ่งผ่านถนนสายลพบุรี–สิงห์บุรีระหว่าง 24.6868 ตัน กับ 25.3132 ตัน เชื่อได้ 95 %

ตัวอย่าง 9.2 วิทยาลัยเอกชนแห่งหนึ่งต้องการทราบรายได้ต่อสัปดาห์ของผู้สำเร็จการศึกษาระดับชั้น ปวช. (ทุกสาขาวิชา) และมีงานทำ โดยสุ่มถามผู้สำเร็จการศึกษาระดับชั้น ดังกล่าวจำนวน 16 คน พบว่ามีรายได้เฉลี่ยสัปดาห์ละ 800 บาท ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 120 บาทจงประมาณรายได้ของผู้สำเร็จการศึกษาชั้น ปวช. ทั้งหมดที่ช่วงความเชื่อมั่น 95 %

วิธีทำ กำหนด μ เป็นรายได้เฉลี่ยต่อสัปดาห์ของผู้สำเร็จการศึกษาระดับชั้น ปวช. ทั้งหมด

ช่วงความเชื่อมั่น 95% ของ μ คือ

$$\overline{X} - (t_{\alpha/2,df}) \frac{S}{\sqrt{n}} < \mu < \overline{X} + (t_{\alpha/2,df}) \frac{S}{\sqrt{n}}$$

เมื่อ $\overline{X} = 800$, $S = 120$, $n = 16$, $t_{.025,15} = 2.13$

ดังนั้น $800 - 2.13\ (\frac{120}{\sqrt{14}}) < \mu < 800 + 2.13\ (\frac{120}{\sqrt{14}})$

$$736.1 < \mu < 863.9$$

นั่นคือ ช่วงความเชื่อมั่น 95 % ของรายได้ต่อสัปดาห์ของผู้สำเร็จการศึกษาระดับชั้น ปวช. (ทุกสาขาวิชา) อยู่ระหว่าง 736.1 กับ 863.9 บาท

+++++