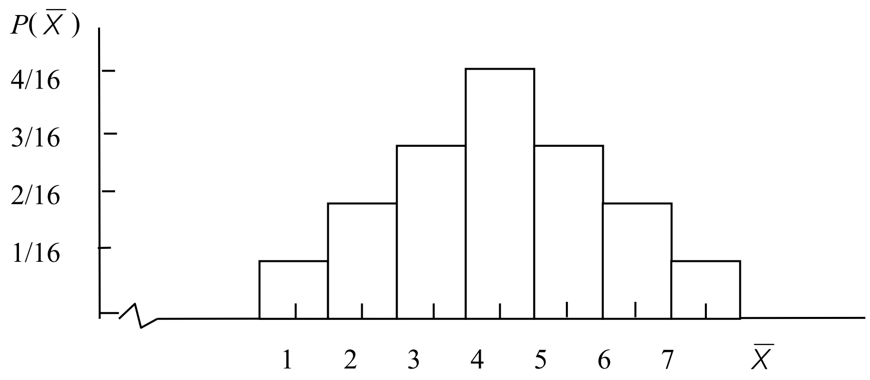
กรณีตัวแปรสุ่ม $X_1, X_2, \ldots$........และ X_n (มีค่า $x_1, x_2, \ldots$......และ x_n) จากประชากรขนาดอนันต์หรือขนาดจำกัดใช้เทคนิคการชักตัวอย่างสุ่มแบบคืนที่ (W/R) สามารถหาแบบตัวอย่างขนาด n (สำหรับ n-1 เรียกว่า df = degree of freedom) ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดและแตกต่างกันด้วยทฤษฎีความน่าจะเป็น กรณีประชากรประกอบด้วย {1,3,5,7} (N=4 และค่า X เป็น 1 3 5 และ 7) คำนวณค่าเฉลี่ย (μ) ได้เท่ากับ 4 และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน (σ_x) เท่ากับ $\sqrt{5}$ เมื่อต้องการชักตัวอย่างขนาด $n = 2$ จากประชากรนี้ โดยใช้เทคนิคการชักตัวอย่างแบบคืนที่ ประชากรจะมีขนาดอนันต์ จะได้ตัวอย่างที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดและแตกต่างกันจำนวน 16 แบบตามตาราง 7.1

ตาราง 7.1 ตัวอย่างขนาด $n = 2$ สำหรับตัวแปรสุ่ม X จากประชากร {1,3,5,7} โดยใช้เทคนิคการชักตัวอย่างสุ่มแบบคืนที่ และแสดงให้เห็นความน่าจะเป็นของค่าเฉลี่ยตัวอย่างด้วยการแจกแจงของค่าเฉลี่ยตัวอย่างดังตาราง 6.2

ตัวอย่างที่	X_1	X_2	$\overline{X}$
1	1	1	1
2	1	3	2
3	1	5	3
4	1	7	4
5	3	1	2
6	3	3	3
7	3	5	4
8	3	7	5
9	5	1	3
10	5	3	4
11	5	5	5
12	5	7	6
13	7	1	4
14	7	3	5
15	7	5	6
16	7	7	7

ตาราง 7.2 การแจกแจงของค่าเฉลี่ยตัวอย่างจากตาราง 7.1

ค่าเฉลี่ยตัวอย่าง ($\overline{X}$)	จำนวนตัวอย่าง	ความน่าจะเป็น $P(\overline{X})$
1	1	$\frac{1}{16}$
2	2	$\frac{2}{16}$
3	3	$\frac{3}{16}$
4	4	$\frac{4}{16}$
5	3	$\frac{3}{16}$
6	2	$\frac{2}{16}$
7	1	$\frac{1}{16}$
รวม	16	1



ฮิสโทแกรมการแจกแจงของค่าเฉลี่ยตัวอย่างจากตาราง 6.2

ค่าคาดหมายของ $\overline{X}$ จากการแจกแจงของ $\overline{X}$ ในตาราง 7.2 เท่ากับค่าเฉลี่ยประชากรคือ

$$E(\overline{X}) = 1(\frac{1}{16}) + 2(\frac{2}{16})+3(\frac{3}{16})+4(\frac{4}{16})+5(\frac{3}{16})+6(\frac{2}{16})+7(\frac{1}{16})$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{9}{16} + \frac{16}{16} + \frac{15}{16} + \frac{12}{16} + \frac{7}{16} = 4$$

สามารถคำนวณค่าผิดพลาดมาตรฐานของค่าเฉลี่ยตัวอย่างได้ดังตาราง 7.3

ตาราง 7.3 การคำนวณค่าผิดพลาดมาตรฐานของค่าเฉลี่ยตัวอย่างจากการแจกแจง ค่าเฉลี่ยตัวอย่างของตาราง 7.2

ค่าเฉลี่ยตัวอย่าง	$P(\overline{X}_j)$	X_j^2	$X_j^2\ P(\overline{X}_j)$
1	$\frac{1}{16}$	1	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{2}{16}$	4	$\frac{8}{16}$
3	$\frac{3}{16}$	9	$\frac{27}{16}$
4	$\frac{4}{16}$	16	$\frac{64}{16}$
5	$\frac{3}{16}$	25	$\frac{75}{16}$
6	$\frac{2}{16}$	36	$\frac{72}{16}$
7	$\frac{1}{16}$	49	$\frac{49}{16}$
	1		$\frac{296}{16}$

จะเห็นว่าความแปรปรวนของค่าเฉลี่ยตัวอย่างจะเท่ากับความแปรปรวนของประชากรหารด้วยขนาดของตัวอย่าง จึงสรุปได้ว่าความแปรปรวนของตัวอย่าง คือสมการ (7-1)

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_x^2}{n} \qquad \ldots(7\text{-}1)$$

และค่าผิดพลาดมาตรฐานของตัวอย่าง (Standard error of $\overline{X}$) คือ สมการ (7-2)

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \qquad \ldots(7\text{-}2)$$

จึงพบว่ากรณีประชากรนี้มีการแจกแจงปรกติหรือตัวอย่างขนาดใหญ่ ($n \geq 20$) การแจกแจงของ $\overline{X}$ มีการแจกแจงปกติ จึงสามารถนำการแจกแจงของไปสู่การ แจกแจงปกติมาตรฐาน จะได้สมการ (7-3)

$$Z_i = \left(\frac{\overline{X}_i - \mu}{\sigma_{\overline{X}}}\right) \qquad \ldots(7\text{-}3)$$

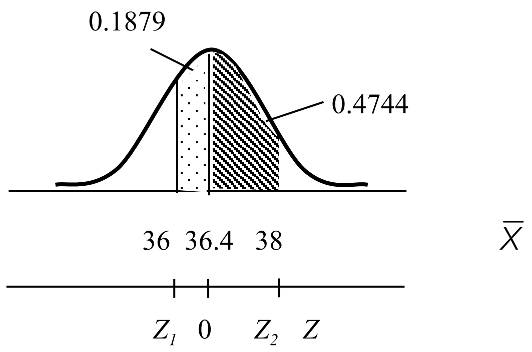
แต่จากสมการ (7-2) $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ ทำให้สมการ (7-3) เขียนใหม่ได้เป็นสมการ (7-4)

$$Z_i = \left(\frac{\overline{X}_i - \mu}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}\right) \qquad \ldots(7\text{-}5)$$

ปรากฏการณ์นี้เรียกว่า ทฤษฎีแนวโน้มสู่ส่วนกลาง (the central limit theorem :CLT) ซึ่งสรุปใจความของกฎได้ว่าการชักตัวอย่างขนาด n จากประชากรที่มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ σ_x จะได้ค่าเฉลี่ยตัวอย่าง $\overline{X}$ ใด ๆ มีค่าผิดพลาดมาตรฐานเท่ากับ $\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ รอบๆ μ พร้อมทั้งการแจกแจงของ $\overline{X}$ จะเป็นการแจกแจงปรกติหรือเข้าใกล้การแจกแจงปกติ

ตัวอย่าง 7.1 จากตัวอย่างสุ่มขนาด $n = 40$ ของประชากรที่มีค่าเฉลี่ย $\mu = 36.4$ ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\sigma_x = 5.2$ จงหาโอกาสที่จะได้ค่าเฉลี่ยของตัวอย่างเหล่านี้เป็น 36 ถึง 38

วิธีทำ จากการแจกแจงปรกติของ $\overline{X}$ ในภาพ 7.3



ภาพ 7.3 **การแจกแจงปกติของ $\overline{X}$ เมื่อ** $n = 40$

และ $$Z_i = \left(\frac{\overline{X}_i - \mu}{\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}}\right)$$

จะได้ $Z_1 = \left(\dfrac{36-36.4}{\dfrac{5.2}{\sqrt{40}}}\right) = -0.49$

$$Z_2 = \left(\dfrac{38-36.4}{\dfrac{5.2}{\sqrt{40}}}\right)$$

$$= 1.95$$

โอกาสที่จะพบค่าระหว่างเฉลี่ยตัวอย่างระหว่าง36 กับ 38 เท่ากับ 0.1879 +0.4744 = 0.6623 **ตอบ**

เมื่อตัวแปรสุ่ม $\overline{X}$ ได้จากประชากรแจกแจงปกติหรือตัวอย่างขนาดใหญ่ ($n \geq 20$) การแจกแจงของ $\overline{X}$ จะเป็นการแจกแจงปกติหรือแจกแจงปกติโดยประมาณ (Casella & Berger, 1990, pp. 216-217) ถ้าประชากรนี้มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ และค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ σ จะเขียนสัญลักษณ์การแจกแจงของ $\overline{X}$ ตามสมการ (7-6)

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \qquad \text{…(7-6)}$$

+++++++