

หน่วยที่ 6 ...การประยุกต์ใช้การแจกแจงปกติของตัวแปร

6.1 การแจกแจงปกติของตัวแปร

การแจกแจงความถี่ของค่าสังเกตหรือตัวแปร X ของกลุ่มใด ๆ ที่จำนวนค่าสังเกตหรือตัวแปร มีมากมายจนนับไม่ได้ มีค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ σ และจุดสูงสุดของโค้ง ปกติตรงกับ μ โค้งค่อย ๆ ลาดลงทางซ้ายและทางขวาเหมือนกัน ส่วนปลายเข้าใกล้แกน X จนเป็น รูประฆังค่าศูนย์กลางความสมมาตรอยู่ที่ μ เราจะเรียกว่า ค่าสังเกตหรือตัวแปร X มีการแจกแจงปกติ ในกรณีนี้ X_1, X_2, \dots, X_n เป็นค่าสังเกตจำนวน n ค่าที่แจกแจงปกติ ตัวมัชฌิมคณิตเท่ากับ μ และความแปร σ^2 แล้วเขียนสัญลักษณ์แทนเป็นสมการ (6-1)

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \quad \dots(6-1)$$

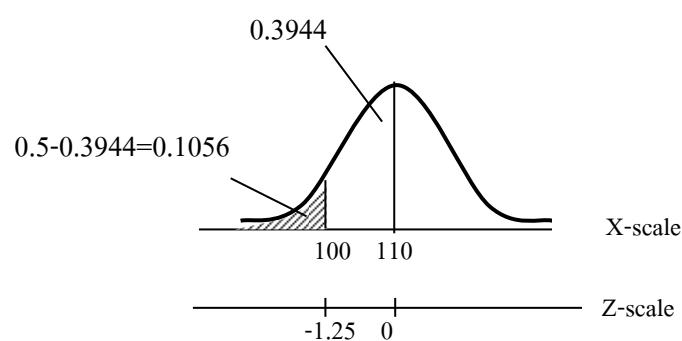
สมการ (6-1) อ่านว่า X มีการแจกแจงปกติ ค่าเฉลี่ยเท่ากับ μ ความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 สมมติว่า X เป็นคะแนนสอบวิชาสถิติธุรกิจของนักศึกษาหลายพันคนแจกแจงปกติคะแนนเฉลี่ย 75 ความแปรปรวน 24 เขียนสัญลักษณ์แทนด้วย $X \sim N(75, 24)$ เป็นต้น

กรณีที่ X มีการแจกแจงปกติ $\mu = 0$ และ $\sigma^2 = 1$ เราจะเรียกว่า X มีการแจกแจงปกติ มาตรฐาน (standard normal distribution) แต่ในสถานการณ์ทั่วไปมาตราส่วนเอกซ์จะมี $\mu \neq 0$ และ $\sigma^2 \neq 1$ จะมีเฉพาะมาตราส่วนซีเท่านั้น ทำให้การแจกแจงปกติมาตรฐานของความถี่จึงมีเฉพาะ กรณีแจกแจงปกติมาตรฐานเขียนแทนว่าด้วยสมการ (6-2)

$$Z \sim N(0, 1) \quad \dots(6-2)$$

ตัวอย่าง 6.1 จากการศึกษาพบว่ารายได้พนักงาน 10,000 คนในบริษัทหนึ่งมีการแจกแจงปกติ เฉลี่ย วันละ 110 บาทต่อคน ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 8 บาทต่อคน จงหาจำนวนพนักงานที่มีรายได้ไม่เกิน วันละ 100 บาท

วิธีทำ เมื่อจำนวนพนักงานที่มีรายได้ไม่เกินวันละ 100 บาท ($X \leq 100$)



$$\begin{aligned} P(X \leq 100) &= P\left(\frac{X_i - \mu}{\sigma}\right) \leq \left(\frac{100 - 110}{8}\right) \\ &= P(Z \leq -1.25) \\ &= 0.1056 \end{aligned}$$

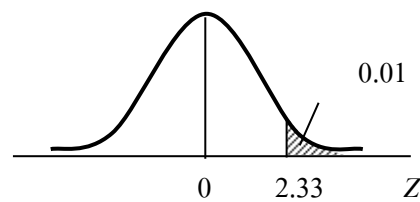
นั่นคือพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐานเมื่อ $Z \leq -1.25$ หรือ $P(Z \leq -1.25)$ คือพื้นที่ใต้เส้นโค้ง ปกติมาตรฐาน ตรงกับ $P(X \leq 100)$ คือพื้นที่ $0.5 - 0.3944$ เท่ากับ 0.1056 หน่วย

ดังนั้นจำนวนพนักงานที่มีรายได้ไม่เกินวันละ 100 บาท มีจำนวนเท่ากับ 10,000(0.1056) เท่ากับ 1,056 คน

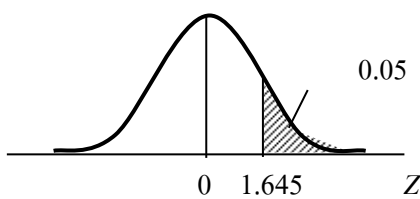
6.2 พื้นที่ปลายหางการแจกแจงปกติ

เมื่อพิจารณาภาพ 6.1 และ 6.2 ในสถานการณ์ที่ระบุให้แบ่งส่วนพื้นที่ปลายหางของการแจกแจงปกติทางขวาก่อนร้อยละ 1 (พื้นที่ปลายหางทางขวาหรือ $P(Z \geq 2.33)$ เท่ากับ 0.01 /ความน่าจะเป็นส่วนหางเท่ากับ 0.01/ระดับนัยสำคัญเท่ากับ .01 /ค่า sig = .01 / p-value = .01 หรือ significance = .01) ตรงกับค่ามาตรฐาน Z เท่ากับ 2.33 เขียนแทนได้เป็น $Z_{.01} = 2.33$ (นำพื้นที่ปลายหางมาเขียนเป็นอักษรห้อย) และพื้นที่ปลายหางทางซ้ายเหลือ 0.01 หน่วยตรงกับค่ามาตรฐาน Z เท่ากับ -2.33 เขียนแทนได้เป็น $Z_{.99} = -2.33$ (พื้นที่ปลายหางค่อยๆเพิ่มจากทางขวาไปจนมี 0.99 หน่วยทำให้ปลายหางซ้ายเหลือเพียง .01 หน่วย) หรือในทางกลับกันอาจต้องการระบุให้แบ่งส่วนปลายหางของการแจกแจงปกติทางซ้ายร้อยละ 1 ก่อน (พื้นที่ปลายหางทางซ้ายมี 0.01 หน่วย) ตรงกับค่ามาตรฐาน Z เท่ากับ -2.33 จะเขียนแทนได้เป็น $Z_{.01} = -2.33$ และพื้นที่ปลายหางทางขวาเหลือ 0.01 หน่วยตรงกับค่ามาตรฐาน Z เท่ากับ 2.33 จะเขียนแทนได้เป็น $Z_{.99} = 2.33$ (หากไม่ระบุให้เริ่มที่หางใดให้สังเกตจากตารางพื้นที่โค้งปกติจากภาพประกอบการอ่านตารางพื้นที่โค้งปกติ)

สำหรับในสถานการณ์ที่ระบุให้แบ่งส่วนหางของการแจกแจงปกติทางขวาก่อนร้อยละ 5 (พื้นที่ปลายหางทางขวาหรือ $P(Z \geq 1.645)$ เท่ากับ 0.05 /ความน่าจะเป็นส่วนหางเท่ากับ 0.05/ระดับนัยสำคัญเท่ากับ .05 /ค่า sig = .05 / p-value = .05 หรือ significance = .05)) ตรงกับค่ามาตรฐาน Z เท่ากับ 1.645 เขียนแทนได้เป็น $Z_{.05} = 1.645$ และพื้นที่ปลายหางทางซ้ายที่เหลือ 0.05 หน่วยตรงกับค่ามาตรฐาน Z เท่ากับ -1.645 เขียนแทนได้เป็น $Z_{.95} = -1.645$ รวมถึงกรณีกลับกันคล้ายกับพื้นที่ที่ทั้งนี้ต้องการใช้สำหรับการอ่านกับค่าวิกฤตของการแจกแจงแบบอื่น ๆ ในกระบวนการทดสอบสมมุติฐานหรือกระบวนการอื่นใดของสาขาสถิติอนุมานต่อไป



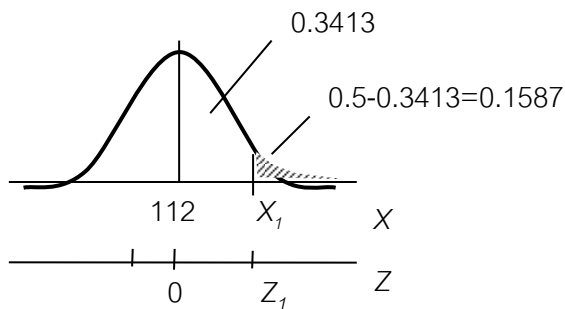
ภาพ 6.1 พื้นที่ปลายหางทางขวาของการแจกแจงปกติร้อยละ 1 ของทั้งหมด ($Z_{.01} = 2.33$)



ภาพ 6.2 พื้นที่ปลายหางทางขวาของการแจกแจงปกติร้อยละ 5 ของทั้งหมด ($Z_{.05} = 1.645$)

ตัวอย่างที่ 6.2 ผลการสอบวิชาความน่าจะเป็นและสถิติของนักศึกษา 200 คน มีการแจกแจงปกติ
คะแนนเฉลี่ย 112 คะแนน ค่าเบี่ยงเบนมาตรฐาน 2 คะแนน จงหาจำนวนนักศึกษาที่ได้คะแนน
ตั้งแต่ 114 คะแนนขึ้นไป

วิธีทำ ใช้ตาราง ในการหาพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน ได้ ดังแสดงในภาพที่ 6.3



ภาพที่ 6.3 พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน เมื่อเปลี่ยนค่าจากมาตราส่วนเอกซ์

เป็นมาตราส่วนของคะแนนสอบวิชาสถิติธุรกิจของนักศึกษา การเปลี่ยนค่าสังเกต X_i
ไปเป็นค่ามาตรฐาน Z_i

$$Z_i = \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)$$

เมื่อ $\mu = 112, \sigma = 2$

ค่ามาตรฐานของ $X_1 = 114$ คือ

$$Z_1 = \left(\frac{114 - 112}{2} \right) = 1$$

เปิดตารางพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน ตาราง อ่านได้เมื่อ $0 < Z \leq 1$ มีพื้นที่ 0.3413 หน่วยพื้นที่
ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน เมื่อ $Z \geq 1$ คือ พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ เมื่อ $X \geq 114$ คือ พื้นที่ $0.5 -$
 0.3413 เท่ากับ 0.1587 หน่วย หรือ $P(X \geq 114) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$

นั่นคือ จำนวนนักศึกษาที่ได้คะแนนตั้งแต่ 114 คะแนนขึ้นไปมีจำนวนเท่ากับ
 $200(0.1587) = 31.74 \approx 32$ คน

+++++