หน่วยที่ 4 การแจกแจงปังซงของตัวแปร

4.1 ความหมายการแจกแจงปังซงของตัวแปร X ถ้าค่า X เป็นการนับสิ่งของหรือจำนวนเรื่องราวที่เกิดขึ้นในช่วงเวลาหนึ่ง กรอบหนึ่ง หรือผิวพื้นที่หนึ่ง เช่น การเฝ้านับจำนวนอุบัติเหตุที่สี่แยกในรอบ 1 วัน จำนวนครั้งของโทรศัพท์ที่เรียกเข้าในช่วงเวลาครั้งหนึ่งของวัน โดย x = 0,1,2,… การแจกแจงปัวซง (Poisson distribution)สามารถเขียนความน่าจะเป็น X เมื่อ X = x ค่าหนึ่ง ได้เป็น (Keller & Warrack , 2000, pp. 219-220)

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad \text{เมื่อ} \quad x = 0,1,2,\ldots \text{และ } \lambda > 0 \qquad \ldots(4\text{-}1)$$

และ λ คือ จำนวนครั้งเฉลี่ยของความสำเร็จหรือใช่ และ e = 2.71828 ซึ่งเป็นของฐานลอกาลิทึมธรรมชาติ (logarithms base of natural) ของค่าเฉลี่ยของ X และความ แปรปรวนของ X อาศัยหลักเกณฑ์จากสมการ (5-24)และสมการ(5-28)ได้ค่าเท่ากัน คือ ถ้า X แจกแจงปัวซง หรือ $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ จะได้ (Hogg, 1989, p. 133)

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x}}{(x-1)!}$$

เนื่องจากเทอมแรก $P(X=0) = 0$ และ $\frac{x}{x!} = \frac{1}{(x-1)!}$

เมื่อ $x > 0$ กำหนดให้ $k = x\text{-}1$ จะได้

$$E(X) = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{k!} = \lambda\, e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{k!}$$

$$= \lambda\, e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$$

สำหรับ $E[X(X\text{-}1)] = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{\lambda^{x}e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=2}^{\infty}\frac{\lambda^{x}}{(x-2)!}$

สองเทอมแรกเป็น $(0)(0\text{-}1)P(X=0) = 0$, $(1)(1\text{-}1)P(X=0) = 0$ และ $\frac{x(x-1)}{x!} = \frac{1}{(x-2)!}$

เมื่อ $x > 1$ กำหนดให้ $k = x\text{-}2$ จะได้

$$E[X(X\text{-}1)] = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+2}}{k!} = \lambda^{2}e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{k!}$$

$$= \lambda^{2}e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda^{2}$$

เมื่อ $E[X(X\text{-}1)] = E(X^{2}) - E(X)$

และ $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = E(X^2) - E(X) + E(X) - [E(X)]^2$

$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$

ดังนั้น $E(X) = Var(X) = \lambda$ ...(4-2)

ตัวอย่างที่ 4.1 จากบันทึกของเจ้าหน้าที่รักษาความปลอดภัยโรงงานแห่งหนึ่ง พบว่ามีพนักงานเดินผ่านประตูเล็กด้านหลังโรงงานช่วงพักกลางวัน 360 คนในเวลา 1 ชั่งโมง

ก. จงใช้ความน่าจะเป็นแบบปัวซงหาความน่าจะเป็นพนักงานจะผ่านประตูนี้ 2 คน ในเวลา 1 นาทีช่วงพักกลางวัน

ข. จงใช้ตาราง..... หาค่าความน่าจะเป็นตามข้อ ก.

ค. จงหาค่าความน่าจะเป็นที่พนักงานจะผ่านประตูเล็กแห่งนี้อย่างน้อย 4 คน ในเวลา 1 นาทีช่วงพักกลางวัน

วิธีทำ *หาค่า* $\lambda = \frac{360}{6} = 6$ *คน / นาที*

ก. $P(X=2) = \frac{e^{-6}6^2}{2!} = \frac{(0.00248)(36)}{(2)(1)}$

$= 0.0446$

ความน่าจะเป็นที่พนักงานจะผ่านประตู 2 คนในเวลา 1 นาที คือ 0.0446

ข. จากตาราง..... หาค่า $P(X \leq 2)$ ได้ดังตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 การหาค่า $P(X \leq 2)$

x	λ			
	4.2	4.4	. . .	6.0
0				.
1				⇓
2				……⟹0.062
.				

$P(X=2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = 0.062 - 0.017 = 0.045$

เมื่อใช้ตารางหาค่าความน่าจะเป็นตามข้อ ก. จะได้เท่ากับ 0.045

ค. จากตาราง..... เมื่อ $P(X \leq 4)$ ได้ดังตารางที่ 4.2

ตารางที่ 4.2 การหาค่า $P(X \leq 4)$

x	4.2 . . . . . 6.0
0	.
1	.
2	.
3	⇓
4	……...…⟹0.285

$P(X \leq 4) = 0.285$

ความน่าจะเป็นที่พนักงานจะผ่านประตูเล็กแห่งนี้อย่างน้อย 4 คน คือ 0.285

ถ้า n มีขนาดโตที่จะสามารถใช้การแจกแจงทวินามแทนการแจกแจงปัวซงได้ ดังตารางที่ 5.14 (Keller & Warrack, 2000, p. 223) เมื่อ $p \leq .05$ และ $\lambda = np$

ตารางที่ 4.3 การเปรียบเทียบความน่าจะเป็นของการแจกแจงทวินามและการแจกแจงปัวซงของ X ที่ $p = 0.02$ และ $n = 50$

x	ความน่าจะเป็น x แจกแจงทวินาม (n = 50 , p = .02)	ความน่าจะเป็น x แจกแจงปัวซง (λ = np = 1)
0	0.364	0.368
1	0.372	0.368
2	0.186	0.184
3	0.061	0.061
4	0.014	0.015
5	0.003	0.003
6	0.001	0.001

4.2 คำสั่งการแจกแจงปังซงของตัวแปร X (ฟังก์ชัน POISSON)

ฟังก์ชันนี้ได้ถูกแทนที่ด้วยฟังก์ชันใหม่อย่างน้อยหนึ่งฟังก์ชัน ซึ่งอาจให้ความถูกต้องมากขึ้น รวมทั้งชื่อก็แสดงถึงการใช้งานได้ดีกว่า ฟังก์ชันนี้ยังคงทำงานร่วมกับ Excel รุ่นก่อนหน้าได้ อย่างไรก็ตาม ความเข้ากันได้กับรุ่นก่อนหน้าไม่ใช่สิ่งจำเป็น คุณควรเริ่มใช้ฟังก์ชันใหม่เนื่องจากฟังก์ชันเหล่านั้นแสดงถึงการทำงานที่ถูกต้องมากกว่า สำหรับข้อมูลเพิ่มเติมเกี่ยวกับฟังก์ชันใหม่ ให้ดูที่ ฟังก์ชัน POISSON.DIST

ไวยากรณ์

POISSON(x,mean,cumulative)

ไวยากรณ์ของฟังก์ชัน POISSON มีอาร์กิวเมนต์ (อาร์กิวเมนต์: ค่าที่ให้ข้อมูลกับแอคชัน เหตุการณ์ วิธีการ คุณสมบัติ ฟังก์ชัน หรือกระบวนงาน)ดังต่อไปนี้

- X (ต้องระบุ) จำนวนเหตุการณ์
- Mean (ต้องระบุ) ค่าตัวเลขที่คาดหมาย
- Cumulative (ต้องระบุ) ค่าตรรกะที่ระบุรูปแบบของการแจกแจงความเป็นไปได้ที่ส่งกลับ ถ้าค่าสะสมเป็น TRUE ฟังก์ชัน POISSON จะส่งกลับค่าความน่าจะเป็นแบบปัวซองสะสม ซึ่งจำนวนเหตุการณ์สุ่มที่เกิดขึ้นจะอยู่ระหว่างช่วงปิดศูนย์และ x ถ้าเป็น FALSE ก็จะส่งกลับฟังก์ชันมวลของค่าความน่าจะเป็นแบบปัวซอง ซึ่งจำนวนเหตุการณ์ที่เกิดขึ้นจะเท่ากับ x

ข้อสังเกต

- ถ้า x ไม่ใช่จำนวนเต็ม ก็จะปัดเศษทิ้ง
- ถ้า x หรือ mean ไม่ใช่ตัวเลข ฟังก์ชัน POISSON จะส่งกลับค่าความผิดพลาด #VALUE!
- ถ้า x < 0 ฟังก์ชัน POISSON จะส่งกลับค่าความผิดพลาด #NUM!
- ถ้า mean < 0, 0 แล้ว ฟังก์ชัน POISSON จะส่งกลับค่าความผิดพลาด #NUM!
- ค่า POISSON สามารถคำนวณได้ดังนี้

เมื่อ cumulative = FALSE

$$POISSON = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{x}}{x!}$$

เมื่อ cumulative = TRUE

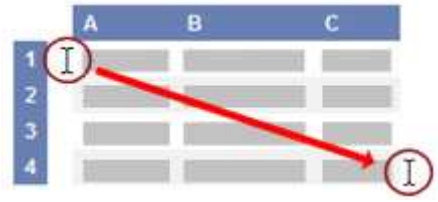
$$CUMPOISSON = \sum_{k=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{k}}{k!}$$

ตัวอย่าง

ถ้าคัดลอกตัวอย่างไปใส่ไว้ในแผ่นงานว่างเปล่าจะทำให้อ่านตัวอย่างได้เข้าใจง่ายยิ่งขึ้น

1. เลือกตัวอย่างในบทความนี้

   สิ่งสำคัญ อย่าเลือกหัวแถวหรือหัวคอลัมน์



การเลือกตัวอย่างจากวิธีใช้

2. กด CTRL+C

3. ใน Excel ให้สร้างสมุดงานหรือแผ่นงานเปล่า

4. ในแผ่นงาน ให้เลือกเซลล์ A1 แล้วกด CTRL+V

   สิ่งสำคัญ เพื่อให้ตัวอย่างทำงานอย่างถูกต้อง คุณต้องวางลงในเซลล์ A1 ของแผ่นงาน

5. เมื่อต้องการสลับระหว่างการดูผลลัพธ์และการดูสูตรที่ส่งกลับผลลัพธ์ ให้กด CTRL+` (อักขระเน้นเสียง) หรือบนแท็บ **สูตร** ในกลุ่ม **ตรวจสอบสูตร** ให้คลิกปุ่ม **แสดงสูตร**

	A	B
1	**ข้อมูล**	**คำอธิบาย**
2	2	จำนวนของเหตุการณ์
3	5	ตัวเลขที่คาดไว้
4	**สูตร**	**คำอธิบาย (ผลลัพธ์)**
5	=POISSON(A2,A3,TRUE)	ความน่าจะเป็นปัวซองสะสมตามเงื่อนไขข้างบน (0.124652)
	=POISSON(A2,A3,FALSE)	ฟังก์ชันมวลรวมความน่าจะเป็นปัวซองตามเงื่อนไขข้างบน (0.084224)
6		

4.3 ตารางการแจกแจงปัวซง $P(X \leq x) = \sum_{x=0}^{n} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$

	λ									
x	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.80	0.90	1.00
0	0.905	0.819	0.741	0.670	0.607	0.549	0.497	0.449	0.407	0.368
1	0.995	0.982	0.963	0.938	0.910	0.878	0.844	0.809	0.772	0.736
2	1.000	0.999	0.996	0.992	0.986	0.977	0.966	0.953	0.937	0.920
3	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.997	0.994	0.991	0.987	0.981
4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.996
5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	λ									
x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.00
0	0.333	0.301	0.273	0.247	0.223	0.202	0.183	0.165	0.150	0.135
1	0.699	0.663	0.627	0.592	0.558	0.525	0.493	0.463	0.434	0.406
2	0.900	0.879	0.857	0.833	0.809	0.783	0.757	0.731	0.704	0.677
3	0.974	0.966	0.957	0.946	0.934	0.921	0.907	0.891	0.875	0.857
4	0.995	0.992	0.989	0.986	0.981	0.976	0.970	0.964	0.956	0.947
5	0.999	0.998	0.998	0.997	0.996	0.994	0.992	0.990	0.987	0.983
6	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.997	0.995
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

ตารางการแจกแจงปัวซง (ต่อ)

	λ									
x	2.2	2.4	2.6	2.8	3.0	3.2	3.4	3.6	3.8	4.0
0	0.111	0.091	0.074	0.061	0.050	0.041	0.033	0.027	0.022	0.018
1	0.355	0.308	0.267	0.231	0.199	0.171	0.147	0.126	0.107	0.092
2	0.623	0.570	0.518	0.469	0.423	0.380	0.340	0.303	0.269	0.238
3	0.819	0.779	0.736	0.692	0.647	0.603	0.558	0.515	0.473	0.433
4	0.928	0.904	0.877	0.848	0.815	0.781	0.744	0.706	0.668	0.629
5	0.975	0.964	0.951	0.935	0.916	0.895	0.871	0.844	0.816	0.785
6	0.993	0.988	0.983	0.976	0.966	0.955	0.942	0.927	0.909	0.889
7	0.998	0.997	0.995	0.992	0.988	0.983	0.977	0.969	0.960	0.949
8	1.000	0.999	0.999	0.998	0.996	0.994	0.992	0.988	0.984	0.979
9	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996	0.994	0.992
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
	λ									
x	4.2	4.4	4.6	4.8	5.0	5.2	5.4	5.6	5.8	6.0
0	0.015	0.012	0.010	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002
1	0.078	0.066	0.056	0.048	0.040	0.034	0.029	0.024	0.021	0.017
2	0.210	0.185	0.163	0.143	0.125	0.109	0.095	0.082	0.072	0.062
3	0.395	0.359	0.326	0.294	0.265	0.238	0.213	0.191	0.170	0.151
4	0.590	0.551	0.513	0.476	0.440	0.406	0.373	0.342	0.313	0.285
5	0.753	0.720	0.686	0.651	0.616	0.581	0.546	0.512	0.478	0.446
6	0.867	0.844	0.818	0.791	0.762	0.732	0.702	0.670	0.638	0.606
7	0.936	0.921	0.905	0.887	0.867	0.845	0.822	0.797	0.771	0.744
8	0.972	0.964	0.955	0.944	0.932	0.918	0.903	0.886	0.867	0.847
9	0.989	0.985	0.980	0.975	0.968	0.960	0.951	0.941	0.929	0.916
10	0.996	0.994	0.992	0.990	0.986	0.982	0.977	0.972	0.965	0.957
11	0.999	0.998	0.997	0.996	0.995	0.993	0.990	0.988	0.984	0.980
12	1.000	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996	0.995	0.993	0.991
13	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996
14	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.999
15	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

ตารางการแจกแจงปัวซง (ต่อ)

	λ									
x	6.5	7.0	7.5	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0	10.5	11.0
0	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.011	0.007	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
2	0.043	0.030	0.020	0.014	0.009	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001
3	0.112	0.082	0.059	0.042	0.030	0.021	0.015	0.010	0.007	0.005
4	0.224	0.173	0.132	0.100	0.074	0.055	0.040	0.029	0.021	0.015
5	0.369	0.301	0.241	0.191	0.150	0.116	0.089	0.067	0.050	0.038
6	0.527	0.450	0.378	0.313	0.256	0.207	0.165	0.130	0.102	0.079
7	0.673	0.599	0.525	0.453	0.386	0.324	0.269	0.220	0.179	0.143
8	0.792	0.729	0.662	0.593	0.523	0.456	0.392	0.333	0.279	0.232
9	0.877	0.830	0.776	0.717	0.653	0.587	0.522	0.458	0.397	0.341
10	0.933	0.901	0.862	0.816	0.763	0.706	0.645	0.583	0.521	0.460
11	0.966	0.947	0.921	0.888	0.849	0.803	0.752	0.697	0.639	0.579
12	0.984	0.973	0.957	0.936	0.909	0.876	0.836	0.792	0.742	0.689
13	0.993	0.987	0.978	0.966	0.949	0.926	0.898	0.864	0.825	0.781
14	0.997	0.994	0.990	0.983	0.973	0.959	0.940	0.917	0.888	0.854
15	0.999	0.998	0.995	0.992	0.986	0.978	0.967	0.951	0.932	0.907
16	1.000	0.999	0.998	0.996	0.993	0.989	0.982	0.973	0.960	0.944
17	1.000	1.000	0.999	0.998	0.997	0.995	0.991	0.986	0.978	0.968
18	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.996	0.993	0.988	0.982
19	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997	0.994	0.991
20	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.998	0.997	0.995
21	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998
22	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999
23	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

ตารางการแจกแจงปัวซง (ต่อ)

	λ

x	11.5	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.0	15.5	16.0
0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.011	0.008	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000
5	0.028	0.020	0.015	0.011	0.008	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001
6	0.060	0.046	0.035	0.026	0.019	0.014	0.010	0.008	0.006	0.004
7	0.114	0.090	0.070	0.054	0.041	0.032	0.024	0.018	0.013	0.010
8	0.191	0.155	0.125	0.100	0.079	0.062	0.048	0.037	0.029	0.022
9	0.289	0.242	0.201	0.166	0.135	0.109	0.088	0.070	0.055	0.043
10	0.402	0.347	0.297	0.252	0.211	0.176	0.145	0.118	0.096	0.077
11	0.520	0.462	0.406	0.353	0.304	0.260	0.220	0.185	0.154	0.127
12	0.633	0.576	0.519	0.463	0.409	0.358	0.311	0.268	0.228	0.193
13	0.733	0.682	0.628	0.573	0.518	0.464	0.413	0.363	0.317	0.275
14	0.815	0.772	0.725	0.675	0.623	0.570	0.518	0.466	0.415	0.368
15	0.878	0.844	0.806	0.764	0.718	0.669	0.619	0.568	0.517	0.467
16	0.924	0.899	0.869	0.835	0.798	0.756	0.711	0.664	0.615	0.566
17	0.954	0.937	0.916	0.890	0.861	0.827	0.790	0.749	0.705	0.659
18	0.974	0.963	0.948	0.930	0.908	0.883	0.853	0.819	0.782	0.742
19	0.986	0.979	0.969	0.957	0.942	0.923	0.901	0.875	0.846	0.812
20	0.992	0.988	0.983	0.975	0.965	0.952	0.936	0.917	0.894	0.868
21	0.996	0.994	0.991	0.986	0.980	0.971	0.960	0.947	0.930	0.911
22	0.998	0.997	0.995	0.992	0.989	0.983	0.976	0.967	0.956	0.942
23	0.999	0.999	0.998	0.996	0.994	0.991	0.986	0.981	0.973	0.963
24	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997	0.995	0.992	0.989	0.984	0.978
25	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996	0.994	0.991	0.987
26	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997	0.995	0.993
27	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.998	0.997	0.996
28	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999	0.999	0.998
29	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999	0.999
30	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	0.999
31	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
32	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
33	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
34	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
35	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

ที่มา : (Watson et al.,1990, pp. 942-947)

+++++++