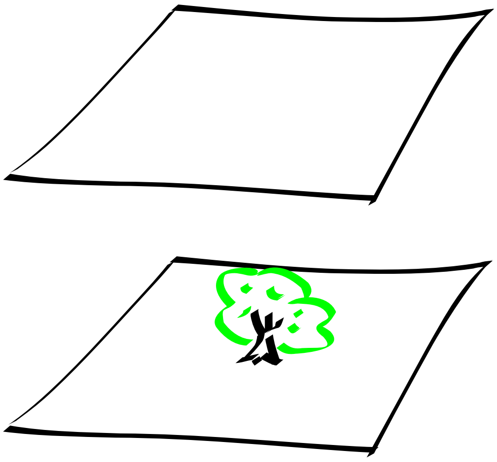
กลศาสตร์ควอนตัม แบบ เล่าสู่กันฟัง (๓)

การรับรู้สมมาตร และ อสมมาตร

ลองนึกถึงสนามเตียนเรียบที่กว้างขวางสุดลูกหูลูกตา สักสนามหนึ่ง ถ้าเราอยู่ภายในสนามนั้น ไม่ว่า เราจะเริ่มเดินทางจากจุดไหนในสนาม เราจะไม่รู้สึกต่างกันเลย แต่ ถ้าภายในสนามมีต้นไม้อยู่ต้นหนึ่ง คราวนี้เราจะรู้ได้ถึงความแตกต่าง ระหว่าง เมื่อเราเริ่มออกเดินทาง จาก จุดที่ใกล้กับต้นไม้ กับ เมื่อเราเริ่มออกเดินทาง จากจุดที่อยู่ห่างไกลจากต้นไม้

สรุปก็คือ เมื่อไหร่ก็ตามที่เรารู้ถึงความเสมอเหมือนกัน เรารู้สมมาตร และ เมื่อไหร่ที่เรารู้ถึงความต่างกัน เรารู้อสมมาตร



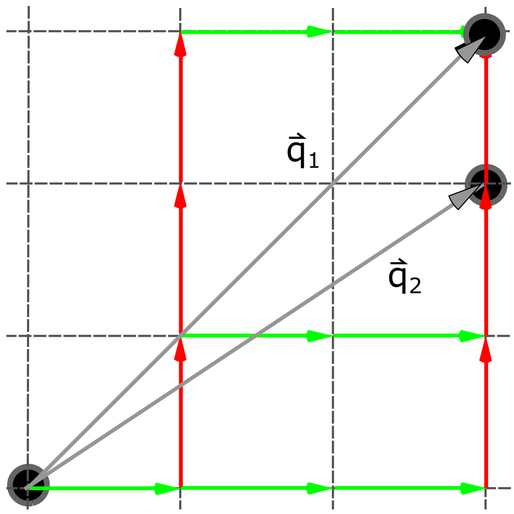
รูปที่ 1: สมมาตร และ อสมมาตร (symmetry and asymmetry)

ข้อสังเกตุ : การสังเกตุจะเกิดขึ้นได้ ก็ต่อเมื่อมี อสมมาตร เท่านั้น จากตัวอย่างของสนามข้างต้นเรา กล่าวได้ว่า เมื่อสมมาตร ถูกทำลายลง ด้วย จุดเครื่องหมายหนึ่งจุด (เช่น ต้นไม้หนึ่งต้น) เราได้อสมมาตร ที่ใช้บอกตำแหน่ง ถ้าสมมาตรถูกทำลายลง ด้วยจุดเครื่องหมายสองจุด (เช่น ต้นไม้สองต้น) เราจะได้อสมมาตรที่ใช้บอกทิศทาง ... คำถามที่น่ารู้ คือ “เรา” สามารถสังเกตุเห็นสมมาตรของสนามได้อย่างไร ?

เครื่องหมายบอกทิศ

เมื่อเราเคลื่อนที่อยู่ในสนามที่เป็นสมมาตร ถ้าเราจะอ้างอิงการเคลื่อนที่ของเรา เราจำเป็นจะต้องทำเครื่องหมายไว้ เพื่อ ทำลาย การรับรู้สมมาตรของสนามนั้น ซึ่งอาจทำได้ โดย การขีดเขียนเส้นทาง ที่เราเดินทางลงบนพื้นสนาม

ถ้าเราลองวิเคราะห์เส้นที่ลากไว้บนพื้นนั้น โดยการแบ่งเส้นนั้นออกเป็นส่วนย่อยๆ เราอาจจะเห็นว่า บางที เราก็เคลื่อนที่ไปในทิศข้างหน้า บางที เราก็เคลื่อนที่ไปในทิศข้างๆ และ บางทีเราก็เคลื่อนที่ไป ในทิศระหว่างข้างหน้า กับ ข้างๆ



รูปที่ 2: ตัวอย่างเส้นทางระหว่างจุดสองจุดที่ถูกบันทึกบนพื้นสนาม

ถ้าสังเกตุให้ดีเราจะพบว่า เราสามารถแทนเส้นทาง ระหว่างจุดสองจุดใดๆ ด้วยเส้นทางตรงย่อยๆ ในสองทิศทาง ซึ่งเป็นอิสระต่อกันได้เสมอ (ลูกศรสีแดง และ ลูกศรสีเขียวในรูปที่ 2) และการเป็นอิสระต่อกันและกันนั้น เราจะใช้ สัญลักษณ์ ที่นักวิทยาศาสตร์กำหนดขึ้น คือ

$$\hat{a}_1 \cdot \hat{a}_2 = 0 \tag{1}$$

ซึ่งมีความหมายเดียวกับการกล่าวว่า ทิศทาง $\hat{a}_1$ และ ทิศทาง $\hat{a}_2$ นั้นมีความขึ้นต่อกันเป็นศูนย์ นอกจากนี้ เราจะใช้สัญลักษณ์สำหรับการมีทิศไปในทางเดียวกัน คือ

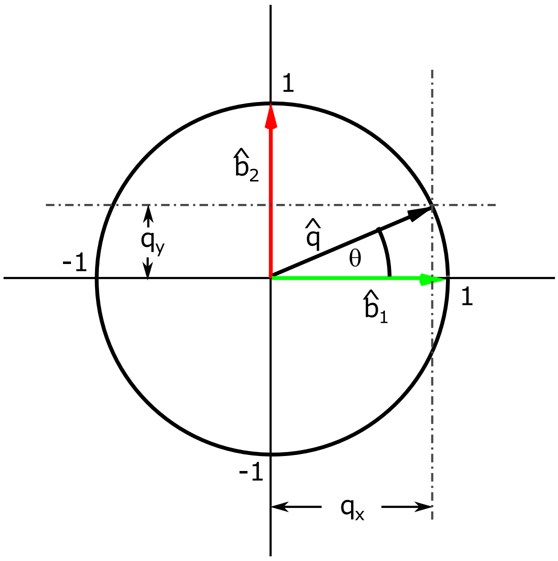
$$\hat{a}_1 \cdot \hat{a}_2 = 1 \tag{2}$$

และ เราใช้สัญลักษณ์สำหรับการมีทิศไปในทางตรงกันข้ามกัน คือ

$$\hat{a}_1 \cdot \hat{a}_2 = -1 \tag{3}$$

หมายเหตุ: การกำหนดทิศ ที่เป็นอิสระต่อกันนั้น ขึ้นอยู่กับ มุมมองของแต่ละคน ซึ่งอาจจะ ไม่เหมือนกัน และ ทิศอิสระที่เรากำหนดขึ้นเพื่อการอ้างอิงนั้น เราจะเรียกว่า ทิศพื้นฐาน

เพื่อให้เราเข้าใจความหมาย ของสัญลักษณ์ข้างต้น ได้ดีขึ้น เราสามารถเสนอสัญลักษณ์ เหล่านั้นได้ ด้วยรูปภาพ ดังแสดงในรูปที่ 3



รูปที่ 3: เข็มทิศ (compass)

จากรูป เราได้กำหนดมุมมองของเรา ให้ $\hat{b}_1$ และ $\hat{b}_2$ เป็น ทิศพื้นฐาน ซึ่ง หมายความว่า เรา กำหนดให้ $\hat{b}_1$ ในรูปภาพแทน $\hat{a}_1$ และ $\hat{b}_2$ ในรูปภาพแทน $\hat{a}_2$ โดยที่ ทั้ง $\hat{b}_1$ และ $\hat{b}_2$ มีความยาวหนึ่งหน่วย

เมื่อกำหนด $\hat{b}_1$ และ $\hat{b}_2$ แล้ว เราสามารถสื่อให้ผู้อื่นรับรู้ถึงทิศทาง $\hat{q}$ ดังแสดงในรูป ด้วยการใช้ทิศทาง $\hat{b}_1$ และ $\hat{b}_2$ ดังนี้

$$\hat{q} = q_x \hat{b}_1 + q_y \hat{b}_2 \tag{4}$$

จากสัญลักษณ์ในข้อที่ (1) เราจะได้ว่า $\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2 = 0$ ในขณะที่ $\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_1 = 1$ และ $\hat{b}_2 \cdot \hat{b}_2 = 1$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} q_x &= \hat{q} \cdot \hat{b}_1 \\ q_y &= \hat{q} \cdot \hat{b}_2 \end{aligned} \tag{5}$$

เราสามารถเขียนสัญลักษณ์ข้างต้นให้อยู่ในรูปของมุม θ โดยกำหนดสัญลักษณ์ใหม่ดังนี้

$$\begin{aligned} q_x &= \cos(\theta) \\ q_y &= \sin(\theta) \\ \hat{q} &= \cos(\theta)\,\hat{b}_1 + \sin(\theta)\,\hat{b}_2 \end{aligned} \tag{6}$$

ในทางวิทยาศาสตร์ q_x และ q_y เป็นตัวชี้ว่า $\hat{q}$ มีทิศทางใกล้เคียงกับ $\hat{b}_1$ และ $\hat{b}_2$ เพียงใด ตัวอย่างเช่น ถ้า $q_x = 1$ (นั่นคือ $q_y = 0$) เราจะบอกได้ว่า $\hat{q}$ มีทิศทางเดียวกันกับ $\hat{b}_1$ และเป็นอิสระต่อ $\hat{b}_2$

ข้อสังเกตุ: หากเราสังเกตุสัญลักษณ์ $\hat{q} \cdot \hat{q}$ เราจะได้ว่า

$$\begin{aligned} \hat{q} \cdot \hat{q} &= q_x^2\,(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_1) + q_x q_y\,(\hat{b}_1 \cdot \hat{b}_2) \\ &\quad + q_y q_x\,(\hat{b}_2 \cdot \hat{b}_1) + q_y^2\,(\hat{b}_2 \cdot \hat{b}_2) \qquad (7) \\ \hat{q} \cdot \hat{q} &= q_x^2 + q_y^2 = q^2 \qquad (8) \end{aligned}$$

ซึ่ง จากทฤษฎีบทของ Pythagoras เราแสดงความสัมพันธ์ ระหว่าง ความยาว ของด้าน ต่างๆ ของสามเหลี่ยมมุมฉากได้ดังนี้

$$q^2 = q_x^2 + q_y^2 = 1 \qquad (9)$$

เพราะฉะนั้น

$$\hat{q} \cdot \hat{q} = 1 \qquad (10)$$

สัญลักษณ์ในข้อที่ (7) และ สัญลักษณ์ในข้อที่ (8) เป็นตัวอย่างที่ดีอันหนึ่ง จากการที่เราใช้ความเป็นอิสระต่อกัน ของ $\hat{b}_1$ และ $\hat{b}_2$ มาช่วย ลดทอน จำนวนของสัญลักษณ์ลง

วัตถุสองสถานะ

เราสามารถใช้มุมมองของทิศ เพื่อกำหนดสถานะของวัตถุขึ้น คือ เมื่อใดก็ตาม ที่ เราสังเกตุเห็น "วัตถุ" จำกัดอยู่ใน "สนาม" ดังที่ยกตัวอย่างไว้ ก่อนหน้านี้นั้น เรากล่าวได้ว่า วัตถุนั้น มี สอง สถานะ ซึ่งก็คือ สถานะในทิศพื้นฐานทั้งสองที่เรากำหนดขึ้น ซึ่งทิศทั้งสองนั้นเป็นอิสระต่อกัน

นักวิทยาศาสตร์ชื่อ Paul Dirac ได้กำหนดสัญลักษณ์ของสถานะ โดยใช้ ทิศพื้นฐาน เป็นเครื่องกำหนด เขาได้เขียน สัญลักษณ์ในข้อที่ (4) ขึ้นใหม่เป็น

$$|\, q \,\rangle = q_1 \,|\, b_1 \,\rangle + q_2 \,|\, b_2 \,\rangle \qquad (11)$$

และ เขียน สัญลักษณ์ในข้อที่ (8) เป็น

$$\langle\, q \,|\, q \,\rangle \;=\; q_1^2 + q_2^2 = 1 \qquad (12)$$

โดยที่

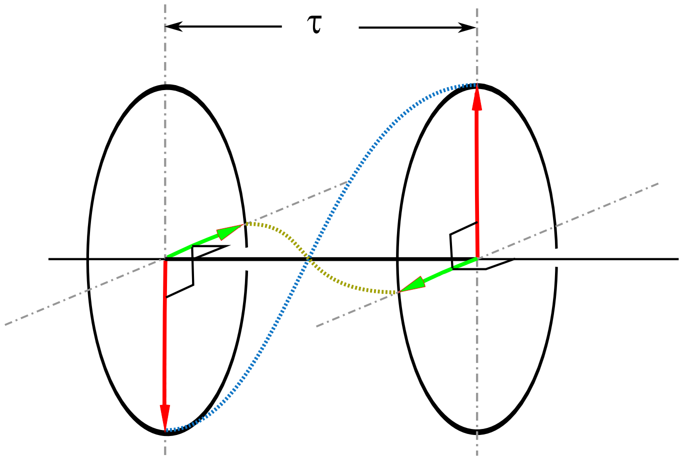
$$\begin{aligned} \langle\, b_1 \,|\, b_1 \,\rangle &= 1 \qquad (13) \\ \langle\, b_2 \,|\, b_2 \,\rangle &= 1 \qquad (14) \\ \langle\, b_1 \,|\, b_2 \,\rangle &= 0 \qquad (15) \\ \langle\, b_2 \,|\, b_1 \,\rangle &= 0 \qquad (16) \end{aligned}$$

การเปลี่ยนแปลงของทิศ

จากสถานะที่ Dirac ได้กำหนดขึ้นนั้น เราจะเห็นว่า “สถานะของวัตถุ” เป็นสิ่งที่ขึ้นอยู่กับ “คุณสมบัติของสนาม” ซึ่งคุณสมบัติของสนามก็ถูกจำกัดด้วย “การเข้าไปสังเกตุวัตถุนั้น”

โดยทั่วไป หากนักวิทยาศาสตร์ ต้องการที่จะศึกษา การเปลี่ยนแปลงสถานะ ของวัตถุแล้ว “เครื่องมือบอกคาบเวลา” จะเป็นเครื่องมือที่ถูกใช้ สำหรับเป็นเครื่องหมาย กำกับ การเปลี่ยนแปลงนั้น (คล้ายกับที่เราขีดเส้นลงบนพื้นของสนามราบ ตามที่ยกตัวอย่างไว้ข้างต้น)

จากตัวอย่างของวัตถุสองสถานะ ที่ได้กล่าวไว้ เราอาจจะตั้งมุมมองต่อวัตถุขึ้นใหม่ โดย ผนวกการกำกับด้วยเวลา เข้ากับรูปที่ 3 ซึ่งก็จะทำให้เราได้สิ่งที่เห็นในรูปที่ 4



รูปที่ 4: บันทึกการเปลี่ยนของทิศพร้อมกับการกำกับคาบเวลา

ด้วยมุมมองตามรูปที่ 4 เรากำหนดสัญลักษณ์เพิ่มเติม ให้กับทิศที่เรากำหนดขึ้น เพื่อกำกับเวลาดังนี้

$$|\, q \,\rangle = q_1(t)\,|\, b_1 \,\rangle + q_2(t)\,|\, b_2 \,\rangle \tag{17}$$

โดยที่ t เป็นสัญลักษณ์เพื่อบอกจำนวนคาบเวลาที่ล่วงเลยไป

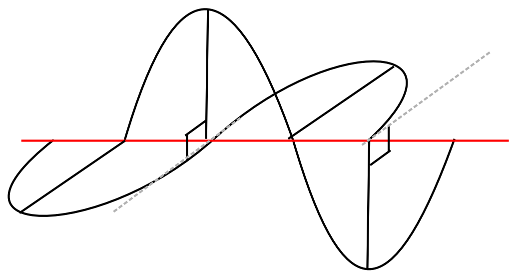
การตั้งมุมมองด้วยคลื่น

การเปลี่ยนแปลงของสถานะนั้น – ซึ่งในที่นี้เราได้ยกตัวอย่าง ทิศ – สามารถเป็นไปได้ในหลายลักษณะ เช่น ทิศที่เปลี่ยนแปลงไปแบบสุ่ม หรือ ทิศที่เปลี่ยนแปลงไปแบบมีแบบแผน ทั้งนี้ก็ขึ้นอยู่กับว่า ผู้สังเกตุจะตั้งมุมมองไว้แบบใด แต่โดยประวัติศาสตร์แล้ว กลศาสตร์ควอนตัมได้ถูก

คิดขึ้นโดยการตั้งมุมมองไว้ว่า การเปลี่ยนแปลงของสถานะนั้น เป็นการเปลี่ยนแปลงแบบ คลื่น (การหมุนของ $\hat{q}$ ในรูปที่ 3) และเราสามารถเขียน สัญลักษณ์ในข้อที่ (17) ได้ใหม่ดังนี้

$$|\, q\,\rangle = \cos(\omega t)\,|\, b_1\,\rangle + \sin(\omega t)\,|\, b_2\,\rangle \tag{18}$$

โดยที่ ω เป็นสัญลักษณ์ แทน ความถี่ของการเปลี่ยนแปลงทิศ และ สัญลักษณ์ในข้อที่ (18) สามารถถูกแสดงได้ด้วยรูปที่ 5



รูปที่ 5: รูปแสดงการเปลี่ยนแปลงทิศ

นอกจากเราตั้งมุมมองให้สถานะมีการเปลี่ยนแปลงแบบคลื่น (หมุน) แล้ว เรายังได้ตั้งมุมมองให้ทิศพื้นฐาน มีการเปลี่ยนแปลงแบบ คลื่น ด้วย การกำหนดเช่นนี้ ทำให้เรา สามารถลดความซับซ้อนของสัญลักษณ์ลงได้อีก ดังนี้

$$\begin{aligned}
|\, q\,\rangle &= \cos(\omega t)\,|\, b_1\,\rangle + \sin(\omega t)\,|\, b_2\,\rangle \\
&= \cos(\omega t)\,|\, b_1\,\rangle + \cos(\omega t - \pi/2)\,|\, b_2\,\rangle \\
&= \mathrm{Re}\,\{\exp(i\omega t)\,|\, b_1\,\rangle\} + \mathrm{Re}\,\{\exp(i\omega t - i\pi/2)\,|\, b_2\,\rangle\} \\
&= \mathrm{Re}\,\{\exp(i\omega t)\,|\, b_1\,\rangle + \exp(i\omega t - i\pi/2)\,|\, b_2\,\rangle\} \\
&= \mathrm{Re}\,\{\exp(i\omega t)\cdot[|\, b_1\,\rangle + \exp(-i\pi/2)\,|\, b_2\,\rangle]\} \\
&= \mathrm{Re}\,\{\exp(i\omega t)\cdot[\,|\, b_1\,\rangle - i\,|\, b_2\,\rangle\,]\} \qquad (19)
\end{aligned}$$

รูปที่ 5 แสดงความเหลื่อมกันในคาบเวลา ของคลื่นในทิศพื้นฐานทั้งสอง โดยที่ ความ เหลื่อมกันนี้ถูกแสดงไว้ด้วย $\cos(\omega t)$ และ $\sin(\omega t)$ ซึ่งก็สามารถถูกย่อความได้ด้วย สัญลักษณ์ i เพียงตัวเดียว โดยที่เราละโครงสร้าง $\mathrm{Re}\,\{\exp\,(i\omega t)\cdot[\ldots]\}$ ไว้ ในฐานที่ เข้าใจ

ข้อสังเกตุ: สัญลักษณ์ในข้อที่ (19) สามารถนำเราไปสู่การจัดรูปสัญลักษณ์แบบ Matrix ได้