# **บทที่ 1** ความน่าจะเป็น /หลักการหาเหตุการทั้งหมดที่เป็นไปได้/หลักการนับ

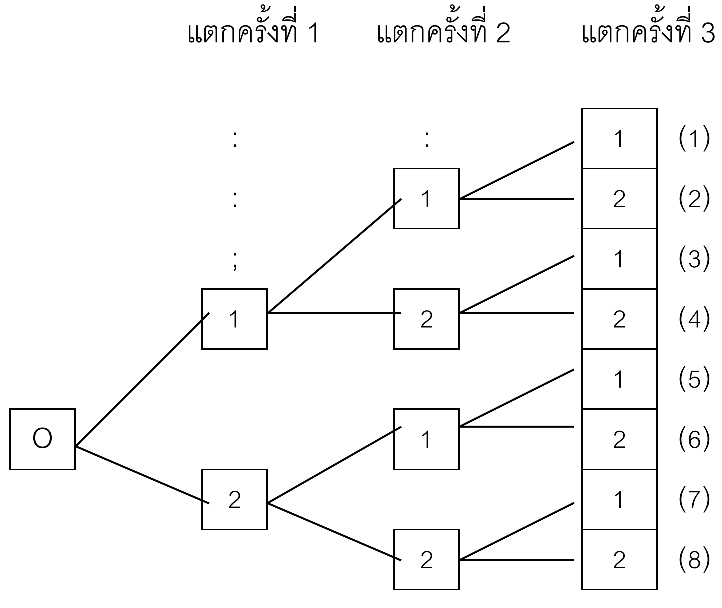
ตัวแบบหลักสำหรับการผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด 3 ลักษณะ คือแผนภูมิต้นไม้ (tree diagram) วิธีเรียงสับเปลี่ยน (permutation) และวิธีจัดหมู่ (combination) ดังจะกล่าวถึงต่อไปนี้

1.1 แผนภูมิต้นไม้ เป็นการหาผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดโดยอาศัยหลักจากธรรมชาติการแตกกิ่งของต้นไม้ เช่น มีกิ่งไม้อยู่ 1 กิ่ง แล้วแตกกิ่งออกจะได้เป็น 2 กิ่งทุกครั้งที่มีการแตกกิ่ง (Keller & Warrack,2000, pp.169-170) พิจารณาภาพที่ 1.1 จะเห็นว่าการแตกกิ่งครั้งที่หนึ่ง จะมีจำนวนกิ่งไม้ทั้งหมด เป็น 2 กิ่ง การแตกกิ่งครั้งที่สอง จะมีจำนวนกิ่งไม้ทั้งหมด 4 กิ่ง และการแตกกิ่งครั้งที่สาม จะมีจำนวนกิ่งไม้ทั้งหมด 8 กิ่ง มีข้อที่ควรสนใจ คือ 2 มาจาก $2^1$ 4 มาจาก $2^2$ และ 8 มาจาก $2^3$ ถ้ามีการแตกกิ่งครั้งที่สี่ จะมีจำนวนกิ่งทั้งหมด $2^4$ เท่ากับ 16 กิ่ง และการแตกกิ่งครั้งที่ห้า จะมีจำนวนกิ่งทั้งหมด $2^5$ เท่ากับ 32 กิ่ง เป็นต้น

ถ้ากำหนดให้มีการแตกกิ่งจำนวน $n$ ครั้ง ๆ ละ 2 กิ่งจะได้สมการ (5-3)

จำนวนกิ่งของการแตกกิ่งครั้งที่ $n = 2^n$ กิ่ง ...(1-1)

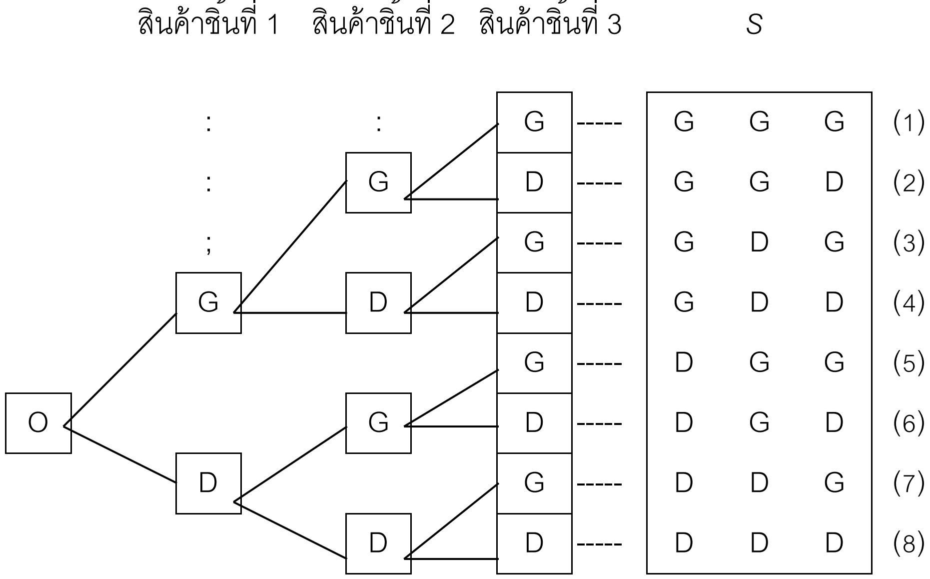
จำนวนกิ่งของการแตกกิ่งครั้งที่ $n$ ตามสมการ (5-3) นี้ก็คือ จำนวนหนทางที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดหรือผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดของเหตุการณ์ที่เรากำลังสนใจอยู่ 2 เหตุการณ์ และปล่อยให้เกิดอย่างอิสระ (มีโอกาสเกิดขึ้นเท่า ๆ กันใน 2 เหตุการณ์นี้ ) จำนวน $n$ ครั้งนั่นเอง




ภาพที่ 1.1 แผนภูมิต้นไม้จำนวนกิ่งไม้ทั้งหมดเมื่อแตกกิ่ง 3 ครั้ง ๆ ละ 2 กิ่ง

**ตัวอย่างที่** 1.1 จงหาผลลัพธ์หรือจำนวนหนทางจะพึงเป็นไปได้ทั้งหมด เมื่อวางสินค้า 3 ชิ้นเพื่อขาย

**วิธีทำ** ผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้ของสินค้าแต่ละชิ้นมี 2 ทาง คือขายได้ (G) และขายไม่ได้ (D) สามารถเขียนแผนภูมิต้นไม้แสดงผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดดังภาพที่ 1.1




ภาพที่ 1.2 แผนภูมิต้นไม้จำนวนหนทางที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด เมื่อวางสินค้า 3 ชิ้น

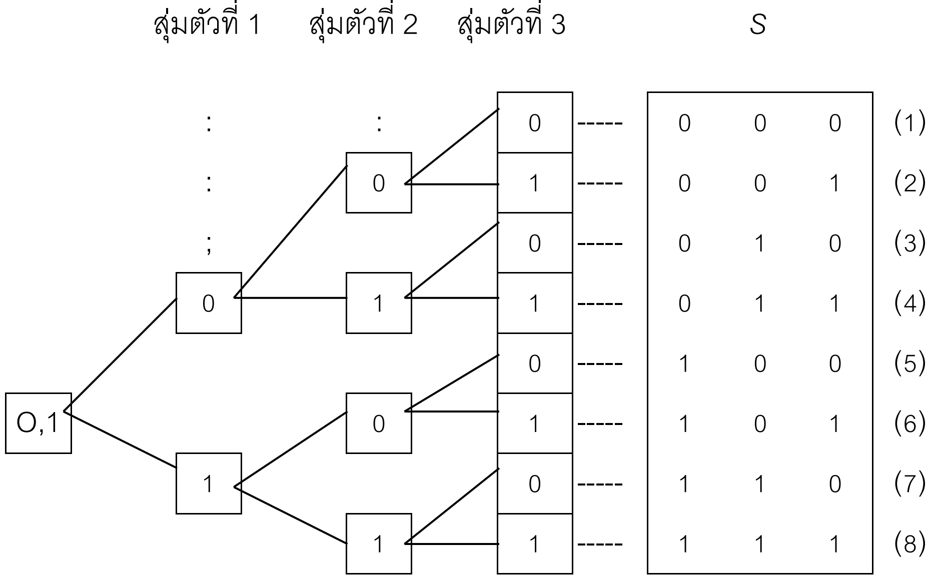
จากประชากรขนาดใหญ่ $M$ หรือประชากรขนาดอนันต์ แต่คุณลักษณะที่เราสนใจมี $2$ อย่าง เช่น รอด—ตาย ดี—เลว สอบได้—สอบตก ชอบ—ไม่ชอบ หัว—ก้อย บวก—ลบ หรืออื่น ๆ ในทำนองเดียวกันและนำไปประยุกต์ใช้กับการชักตัวอย่างสุ่มขนาด $n$ จากประชากรขนาดอนันต์ ที่มีความแตกต่างหรือมีข้อแตกต่างกันภายในประชากรเพียง $2$ ประชากร เช่น ลูกปัดกองใหญ่มีสีขาวกับสีแดง ฉลากจำนวนนับไม่ถ้วนมีเบอร์ $4$ กับเบอร์ $7$ เป็นต้น เซตผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด คือ เซตตัวอย่างขนาด $n$ ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด และจำนวนตัวอย่างขนาด $n$ ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด สามารถคำนวณได้เช่นเดียวกับการหาจำนวนกิ่งไม้ที่แตกกิ่งครั้งละ $2$ กิ่ง จำนวน $n$ ครั้ง ตามสมการ (5-3) และถ้าประชากรขนาดอนันต์ มีคุณลักษณะที่เราสนใจหรือมีข้อแตกต่างกันภายใน $2$ ประการ จะได้สมการ (6-4)

จำนวนตัวอย่างขนาด $n$ ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด $= 2^n$ …(1-2)

**ตัวอย่างที่ 1.2** ประชากรขนาดอนันต์ ประกอบด้วย 0 และ 1 จงแสดงจำนวนตัวอย่างสุ่มขนาด $n = 3$ ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด

**วิธีทำ** ประชากรขนาดอนันต์ที่มีข้อแตกต่างกัน 2 ประการ คือ 0 และ 1 เมื่อต้องการตัวอย่างขนาด $n = 3$

ดังนั้น จำนวนตัวอย่างที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ $2^3 = 8$ ตัวอย่าง ถ้ากำหนดให้ $S$ เป็นเซตตัวอย่างขนาด $n = 3$ ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด




ภาพที่ 1.2 แผนภูมิต้นไม้จำนวนตัวอย่างสุ่มขนาด $n = 3$ จากประชากรขนาดอนันต์

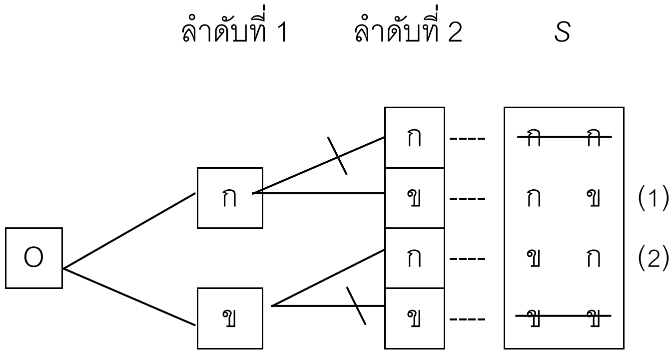
ในสถานการณ์ทั่วไป ประชากรขนาดอนันต์จะมีคุณลักษณะที่เราสนใจหรือข้อแตกต่างกันภายในประชากรไม่ได้มีเพียง 2 ประชากรเสมอไป ได้แก่ 3 ประชากร 4 ประชากร 5 ประชากร ........ $m$ ประชากร จึงเป็นการแตกกิ่งไม้ครั้งละ 3 กิ่ง 4 กิ่ง 5 กิ่ง ...... และ $m$ กิ่ง ตามลำดับ เช่น

1) กรณีประชากรขนาดอนันต์มีคุณลักษณะที่เราสนใจ หรือข้อแตกต่างกันภายในประชากร 3 ประชากรตัวอย่างขนาด $n$ เท่ากับ 1, 2, 3, ... , $n$ จะมีจำนวนตัวอย่างที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ $3^1, 3^2, 3^3, \ldots, 3^n$ ตามลำดับ

2) กรณีประชากรอนันต์มีคุณลักษณะที่เราสนใจ หรือข้อแตกต่างกันภายในประชากร 4 ประการ ตัวอย่างขนาด $n$ เท่ากับ $4^1, 4^2, 4^3, \ldots, 4^n$ ตามลำดับ เป็นต้น จึงสรุปได้ว่า ถ้าประชากรขนาดอนันต์มีคุณลักษณะที่เราสนใจ หรือข้อแตกต่างกันภายใน ประชากร $m$ ประการ จะได้สมการ (1-3)

$$\text{จำนวนตัวอย่างขนาด } n \text{ ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด} = m^n \qquad \ldots(1\text{-}3)$$

1.2 วิธีเรียงสับเปลี่ยน (Permutation) การหาผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดด้วยวิธีเรียงสับเปลี่ยนนี้มีพื้นฐานมาจากการหาจำนวนวิธีที่จะจัดลำดับตำแหน่ง หรือจัดลำดับการเสนอชื่อคน สัตว์ สิ่งของ ซึ่งมีจำนวนตั้งแต่ 2 ขึ้นไปว่า สามารถกระทำได้กี่วิธีที่ไม่ซ้ำกัน เช่น มีคนจำนวน 2 คน คือนาย ก กับนาย ข อาจจัดลำดับการเสนอชื่อได้เป็น วิธีที่ 1 : (ก , ข) วิธีที่ 2 : (ข , ก) แสดงว่ามีวิธีเรียงสับเปลี่ยน ได้จำนวน 2 วิธี ที่ไม่ซ้ำกัน ซึ่งจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดก็คือ ผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดหรือจำนวนหนทางที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด และอาจใช้แผนภูมิต้นไม้แสดงจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด แต่ตัดกิ่งที่แสดงการจัดเรียงสับเปลี่ยนที่เป็นไปไม่ได้ออกหรือสับเปลี่ยนแล้วมีความหมายเหมือนเดิม สังเกตจากวิธีเรียงสับเปลี่ยนลำดับการเสนอชื่อ นาย ก และนาย ข ด้วยแผนภูมิต้นไม้ ดังภาพที่ 5.7




ภาพที่ 1.3 แผนภูมิต้นไม้วิธีเรียงสับเปลี่ยนลำดับการเสนอชื่อ นาย ก นาย ข และตัดวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่เป็นไปไม่ได้ออก

จากภาพที่ 1.3 แผนภูมิต้นไม้มีการแตกกิ่งครั้งละ 2 กิ่ง (นาย ก, นาย ข) จำนวน 2 ครั้ง (ลำดับที่ 1 , ลำดับที่ 2) แต่ตัดวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่เป็นไปไม่ได้ คือ (ก , ก) หมายถึง นาย ก อยู่ลำดับที่ 1 และนาย ก อยู่ลำดับที่ 2 และ (ข , ข) หมายถึงนาย ข อยู่ลำดับที่ 2 ในเวลาเดียวกันย่อมเป็นไปไม่ได้

จากที่กล่าวมา การหาวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดด้วยการอาศัยแผนภูมิต้นไม้แต่ตัดส่วนที่เป็นไปไม่ได้ด้วยวิธีเรียงสับเปลี่ยนออกไม่สะดวกเท่าที่ควรจึงขอเสนอ กฎเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน ในกรณีมีสิ่งของ (คน สัตว์หรืออื่น ๆ) ที่แตกต่างกัน m ชิ้น กำหนดให้เรียงสับเปลี่ยนลำดับตำแหน่งหรือลำดับการเสนอชื่อ ครั้งละ n ชิ้น จะได้สมการ (1-4)

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับ $P_n^m$ …(1-4)

อ่านว่า $m$ การเรียงสับเปลี่ยน $n$ หรือ $m$ การจัดลำดับ $n$ โดยมีข้อกำหนดดังสมการ (1-5)

$$P_n^m = \frac{m!}{(m-n)!} \qquad ...(1\text{-}5)$$

และ $m!$ อ่านว่า $m$ แฟกทอเรียล ($m$ factorial) คือ ผลคูณของตัวเลขตั้งแต่ค่าที่กำหนดกับค่าที่ลดหลั่นลงไปครั้งละ 1 หน่วยเรื่อย ๆ ไปจนถึง 1 เช่น $2! = (2)(1)$ (อ่านว่า 2 แฟกทอเรียลเท่ากับ 2 คูณ 1)

$$10! = (10)(9)(8) \ldots\ldots\ldots (3)(2)(1)$$

(อ่านว่า 10 แฟกทอเรียลเท่ากับ 10 คูณ 9 คูณ 8 คูณ ........ คูณ 3 คูณ 2 คูณ 1) หรือกรณี $m$ เป็นเลขจำนวนเต็มบวกใด ๆ จะได้

$$m! = m(m-1)(m-2)(m-3) \ldots\ldots\ldots (3)(2)(1) \qquad ..(1\text{-}6)$$

และ $$0! = 1 \qquad ...(1\text{-}7)$$

**ตัวอย่าง 1.3** จงหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนตำแหน่งวางหนังสือ 3 เล่ม ครั้งละ 3 เล่ม

**วิธีทำ** จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่พึ่งเป็นไปไดทั้งหมด $P_n^m$ วิธี

$$P_3^3 = \frac{3!}{(3-3)!} \quad ; \quad m = 3\ ,\ n = 3$$

$$= \frac{(3)(2)(1)}{1} \quad ; \quad 0! = 1$$

$$P_3^3 = 6$$

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนตำแหน่งวางหนังสือ 3 เล่มนี้มี 6 วิธี

**ตัวอย่างที่ 1.4** ประชากรประกอบด้วยคุณลักษณะ 4 ประการคือ 3, 4, 5 และ 9 ต้องการตัวอย่างขนาด $n = 2$ สุ่มหยิบครั้งละ 1 หน่วยจนครบ 2 หน่วยตามต้องการ (หยิบได้แล้วไม่ใส่กลับคืน) จงหาจำนวนตัวอย่างที่เป็นไปได้ทั้งหมด

**วิธีทำ** การสุ่มหยิบครั้งละ 1 หน่วย (ไม่ใส่กลับคืน) จนได้ตัวอย่างขนาด $n = 2$ แสดงว่าจำนวนประชากรถูกจำกัดโดยวิธีเรียงสับเปลี่ยนจึงได้จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่พึงเป็นไปได้คือจำนวนตัวอย่างขนาด $n = 2$ ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด

จำนวนตัวอย่างขนาด $n = 2$ ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด $P_n^m$ ตัวอย่าง

$m = 4$ และ $n = 2$

$$P_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!}$$

$$= \frac{(4)(3)(2)(1)}{(2)(1)} = 12$$

จำนวนตัวอย่างที่เป็นไปได้ทั้งหมดทั้งหมด 12 แบบ

1.3 วิธีจัดหมู่ (combination) การหาผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดด้วยวิธีจัดหมู่ เป็นการจัดหมู่คน สัตว์ สิ่งของจำนวนเดียวกันกับวิธีเรียงสับเปลี่ยน แต่ไม่ถือว่าการจัดลำดับตำแหน่งหรือลำดับการเสนอชื่อก่อนหลังเป็นสาระสำคัญในการแยกหมู่หรือแยกกลุ่ม เช่น กลุ่ม (ก, ข) ไม่ถือว่าแตกต่างจากกลุ่ม (ข, ก) การจัดหนังสือจำนวน 3 เล่มเข้าที่ วางครั้งละ 3 เล่มตามวิธีเรียงสับเปลี่ยนได้ถึง 6 วิธีที่ไม่ซ้ำกัน ดังภาพที่ 5.7 ได้แก่ $S$ คือ {1 2 3 , 1 3 2 , 2 1 3 , 2 3 1 , 3 1 2 , 3 2 1} เมื่อเป็นวิธีการจัดหมู่จะถือว่ามีวิธีเดียวคือ $S$ คือ {1 2 3} เท่านั้น หรือการจัดหนังสือจำนวน 3 เล่มเขาที่วางครั้งละ 2 เล่มตามวิธีเรียงสับเปลี่ยนได้ถึง 6 วิธีที่ไม่ซ้ำกัน ดังภาพที่ 5.8 ได้แก่ $S$ คือ { 1 2 , 1 3 , 2 1 , 2 3 , 3 1 , 3 2 } เมื่อเป็นวิธีจัดหมู่จะถือว่ามี 3 วิธีคือ $S$ คือ { 1 2 , 1 3 , 2 3 } เป็นต้น

ถ้ามีสิ่งของ คน สัตว์หรืออื่น ๆ ที่แตกต่างกัน $m$ ชิ้น กำหนดให้เป็นหมู่หรือเป็นกลุ่ม ๆ ละ $n$ ชิ้น จะได้สมการ (5-10) และสมการ (5-11)

จำนวนวิธีจัดหมู่ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด $= \binom{m}{n}$ วิธี ...(1-8)

อ่านว่า $m$ การจัดหมู่ $n$ ($m$ combination $n$) โดยกำหนดว่า

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{(m-n)!\,n!} \qquad \text{…(1-9)}$$

**ตัวอย่างที่ 1.5** จงหาวิธีจัดหมู่หนังสือ 3 เล่มที่มีสีปกที่แตกต่างกัน ครั้งละ 3 เล่ม

**วิธีทำ** จำนวนวิธีจัดหมู่ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด $\binom{m}{n}$ วิธี

$m = 3$ และ $n = 3$

$$\binom{3}{3} = \frac{3!}{(3-3)!3!}$$

$$= \frac{(3)(2)(1)}{(1)(3)(2)(1)}$$

$$= 1$$

ดังนั้นในการจัดหมู่ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด 1 วิธี คือ $S = \{1\ 2\ 3\}$

**ตัวอย่างที่ 1.6** จงหาวิธีจัดหมู่หนังสือ 3 เล่ม ที่มีสีปกที่แตกต่างกัน ครั้งละ 2 เล่ม

**วิธีทำ** จำนวนวิธีจัดหมู่ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด $\binom{m}{n}$ วิธี

$m = 3$ และ $n$ =- 2

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!}$$

$$= \frac{(3)(2)(1)}{(1)(2)(1)} = 3$$

ดังนั้นในการจัดหมู่ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมด 3 วิธี คือ $S = \{1\ 2, 1\ 3, 2\ 3\}$

วิธีจัดหมู่นี้ถูกนำไปประยุกต์ใช้อย่างแพร่หลายในชีวิตประจำวัน เช่น การจัดหมู่นักศึกษา การจัดทีมฟุตบอล การจัดกรรมการในงานใดงานหนึ่งหรืออื่น ๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งในกระบวนการสุ่มตัวอย่างขนาด $n$ จากประชากรที่มีคุณลักษณะที่เราสนใจหรือประกอบด้วยข้อแตกต่างกันภายในประชากร $m$ ประการ ด้วยเทคนิคการชักตัวอย่างสุ่มแบบไม่คืนที่ ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อ 6.2.2 บทที่ 6 ต่อไป อย่างไรก็ดีการหาผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดไม่ว่าวิธีใดใน 3 วิธีดังที่กล่าวมาแล้วในหัวข้อ 5.3.1 ถึง 5.3.3 เป็นการหาผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดสำหรับการหาค่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์เชิงเดี่ยวซึ่งเป็นสมาชิกของเซตผลลัพธ์ที่พึงเป็นไปได้ทั้งหมดนั่นเอง