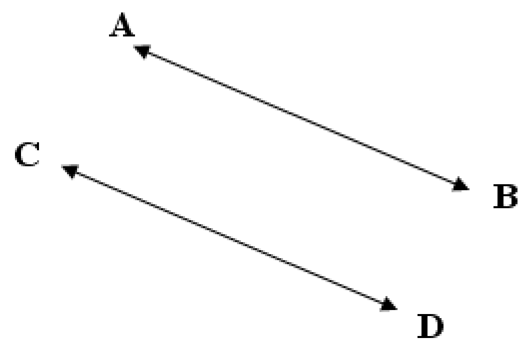
เส้นขนาน สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

1.เส้นขนานและมุมภายใน

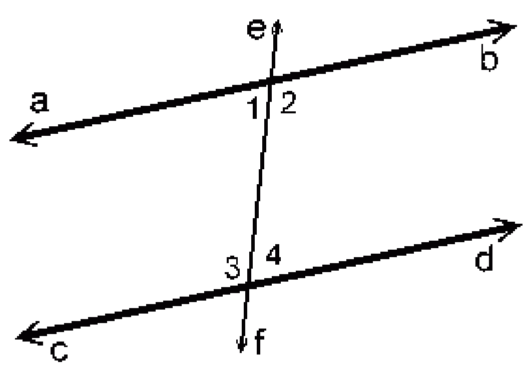
บทนิยาม เส้นตรงสองเส้นที่บนระนาบเดียวกันขนานกันเมื่อเส้นทั้งสองนี้ไม่ตัดกัน



หลักการง่ายที่ใช้พิจารณาว่าเส้นตรงสองเส้นขนานกันหรือไม่

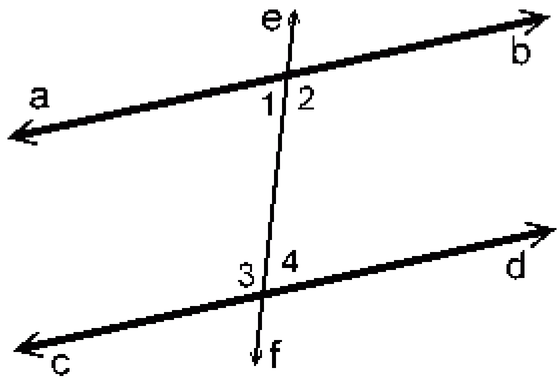
1. ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัดแล้วขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเป็น 180 องศา

2. ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเป็น 180 องศาแล้ว เส้นตรงคู่นี้จะขนานกัน



บทนิยาม เส้นตรงสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเราเรียกมุมที่อยู่ภายในระหว่างเส้นคู่ขนานเรียกว่า ***มุมภายใน***

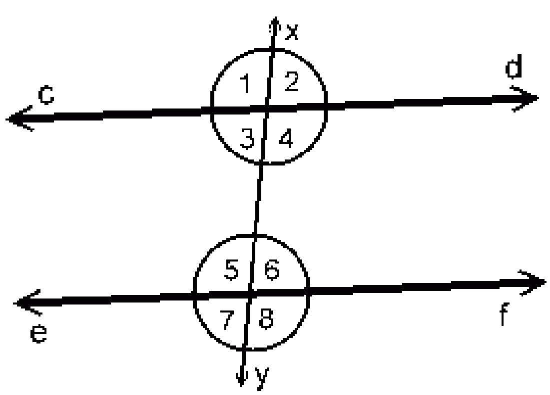
มุมภายในบนข้างเดียวของเส้นตัด



ab // cd มีเส้นตรง ef ตัด ทำให้เกิดมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัดสองข้าง คือ มุม 1 กับ 3 และ มุม 2 กับ 4

ตัวอย่าง 1

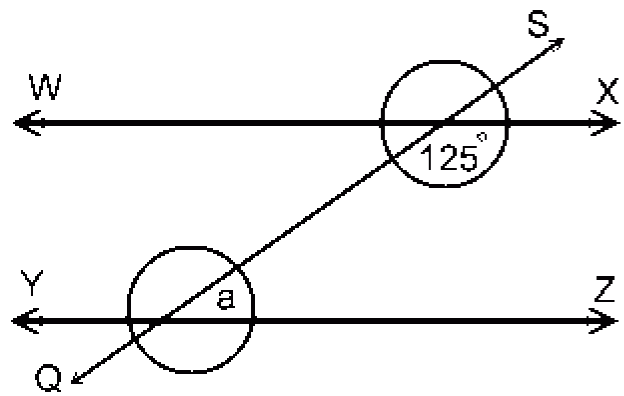
กำหนดให้ ab และ cd แต่ละรูปขนานก้น มุมภายในบนเส้นเดียวกันของเส้นตัดบวกกันได้ 180°



$\hat{3} + \hat{5} = 180^\circ$ $\hat{4} + \hat{6} = 180^\circ$

ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมัเส้นตัดแล้ว ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเป็น 180 องศา

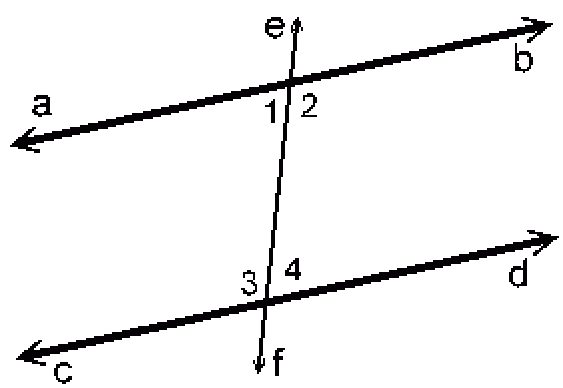
ตัวอย่าง 2 จงหาค่าของมุม a ในกรณีต่อไปนี้



a = 180° - 125° = 55°

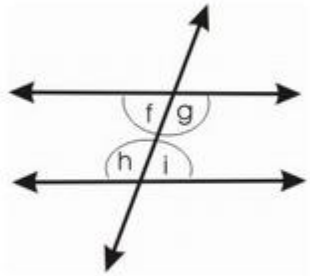
ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเป็น 180 องศาแล้ว เส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน

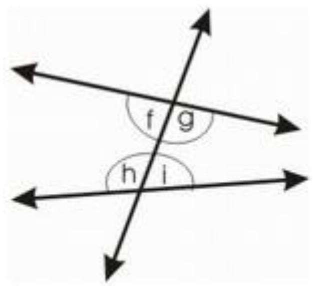
2. เส้นขนานและมุมแย้ง

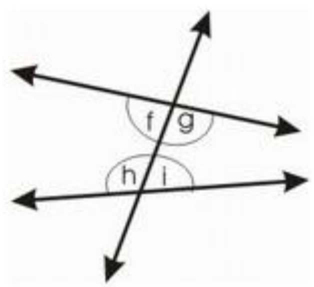


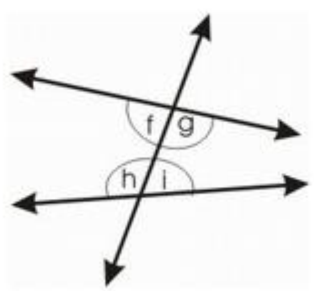
1 . ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัดแล้วมุมแย้งจะมีขนาดเท่ากัน

2 . เส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ถ้ามุมแย้งที่เกิดขึ้นมีขนาดเท่ากันแล้วเส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน





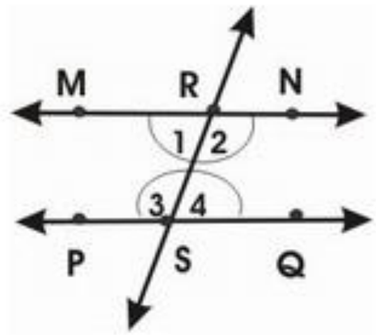




จากรูป มุม f และ มุม i เป็นมุมแย้ง มุม g และ มุม h เป็นมุมแย้ง

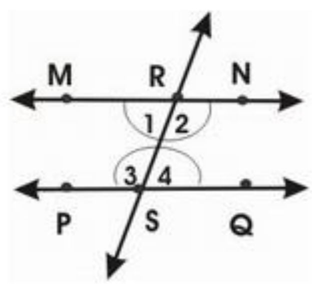
ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตรงอีกเส้นหนึ่งมาตัดเส้นขนานแล้ว มุมแย้งจะมีขนาดเท่ากัน

จากรูป MN ขนานกับ PQ และ RS เป็นเส้นตัดทำให้เกิดมุมแย้ง จะได้ว่า มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน ดังนี้



MRS = RSQ (มุม 1 = มุม 4) และ NRS = RSP (มุม 2 = มุม 3)

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งทำให้มุมแย้งที่เกิดขึ้นมีขนาดเท่ากันแล้วเส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน



จากรูป RS ตัด MN และ PQ ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน คือ มุม 1 = มุม 4 หรือ มุม 2 = มุม 3 จะได้ว่า เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

3. เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน

สมบัติของเส้นขนาน และมุมภายนอกกับมุมภายใน ที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด

1.ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัดแล้ว มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดจะมีขนาดเท่ากัน

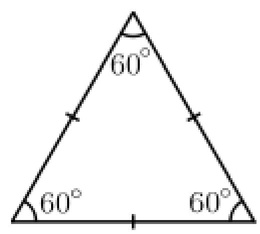
2.ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากันแล้ว เส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน

มุมภายนอก แบ่งตามความยาวของด้าน

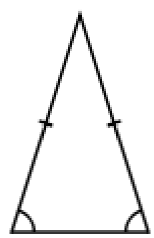
รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า (equilateral) มีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเป็นรูปหลายเหลี่ยมมุมเท่า นั่นคือมุมภายในทุกมุมจะมีขนาดเท่ากัน คือ 60° และเป็นรูปหลายเหลี่ยมปกติ

รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (isosceles) มีด้านสองด้านยาวเท่ากัน (ตามความหมายเริ่มแรกโดยยุคลิด ถึงแม้ว่ารูปสามเหลี่ยมด้านเท่าจะสามารถจัดว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ด้วย เพราะมีด้านที่ยาวเท่ากันอย่างน้อยสองด้าน) และมีมุมสองมุมขนาดเท่ากัน คือมุมที่ไม่ได้ประกอบด้วยด้านที่เท่ากันทั้งสอง

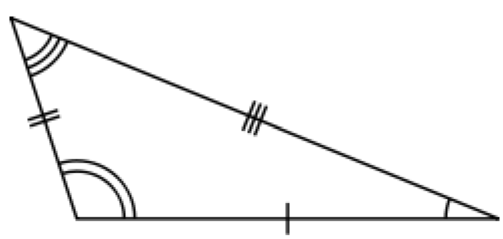
รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า (scalene) ด้านทุกด้านจะมีความยาวแตกต่างกัน มุมภายในก็มีขนาดแตกต่างกันด้วย



รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

แบ่งตามมุมภายใน

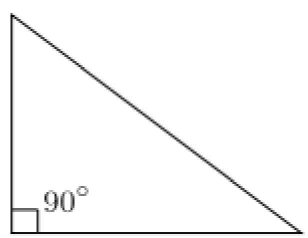
รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (right, right-angled, rectangled) มีมุมภายในมุมหนึ่งมีขนาด 90° (มุมฉาก) ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมฉากเรียกว่า **ด้านตรงข้ามมุมฉาก** ซึ่งเป็นด้านที่ยาวที่สุดในรูปสามเหลี่ยม อีกสองด้านเรียกว่า **ด้านประกอบมุมฉาก** ความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากสัมพันธ์กันตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส นั่นคือกำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก c จะเท่ากับผลบวกของกำลังสองของด้านประกอบมุมฉาก a, b เขียนอย่างย่อเป็น ดูเพิ่มเติมที่ รูปสามเหลี่ยมมุมฉากพิเศษ

รูปสามเหลี่ยมมุมเฉียง (oblique) ไม่มีมุมใดเป็นมุมฉาก ซึ่งอาจหมายถึงรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหรือรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม

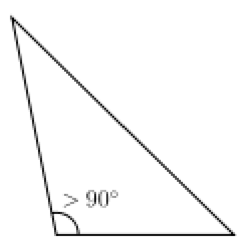
รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน (obtuse) มีมุมภายในมุมหนึ่งมีขนาดใหญ่กว่า 90° (มุมป้าน)

รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม (acute) มุมภายในทุกมุมมีขนาดเล็กกว่า 90° (มุมแหลม)

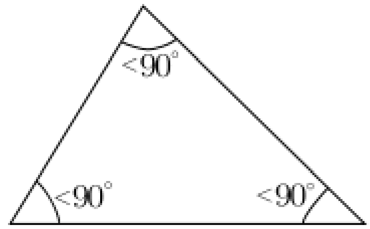
รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม แต่รูปสามเหลี่ยมมุมแหลมทุกรูปไม่ได้เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน



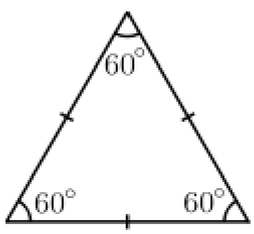
รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม

มุมภายใน แบ่งตามความยาวของด้าน

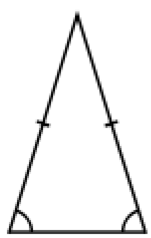
รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า (equilateral) มีด้านทุกด้านยาวเท่ากัน รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเป็นรูปหลายเหลี่ยมมุมเท่า นั่นคือมุมภายในทุกมุมจะมีขนาดเท่ากัน คือ 60° และเป็นรูปหลายเหลี่ยมปกติ

รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว (isosceles) มีด้านสองด้านยาวเท่ากัน (ตามความหมายเริ่มแรกโดยยุคลิด ถึงแม้ว่ารูปสามเหลี่ยมด้านเท่าจะสามารถจัดว่าเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วได้ด้วย เพราะมีด้านที่ยาวเท่ากันอย่างน้อยสองด้าน) และมีมุมสองมุมขนาดเท่ากัน คือมุมที่ไม่ได้ประกอบด้วยด้านที่เท่ากันทั้งสอง

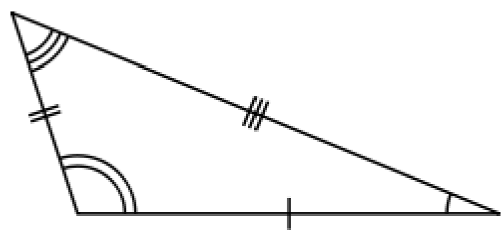
รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า (scalene) ด้านทุกด้านจะมีความยาวแตกต่างกัน มุมภายในก็มีขนาดแตกต่างกันด้วย



รูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



รูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว



รูปสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า

แบ่งตามมุมภายใน

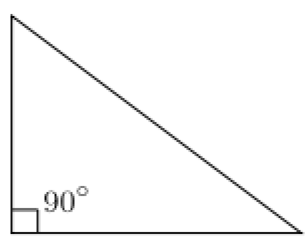
รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (right, right-angled, rectangled) มีมุมภายในมุมหนึ่งมีขนาด 90° (มุมฉาก) ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมฉากเรียกว่า *ด้านตรงข้ามมุมฉาก* ซึ่งเป็นด้านที่ยาวที่สุดในรูปสามเหลี่ยม อีกสองด้านเรียกว่า **ด้านประกอบมุมฉาก** ความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากสัมพันธ์กันตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส นั่นคือกำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก c จะเท่ากับผลบวกของกำลังสองของด้านประกอบมุมฉาก a, b เขียนอย่างย่อเป็น ดูเพิ่มเติมที่ รูปสามเหลี่ยมมุมฉากพิเศษ

รูปสามเหลี่ยมมุมเฉียง (oblique) ไม่มีมุมใดเป็นมุมฉาก ซึ่งอาจหมายถึงรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหรือรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม

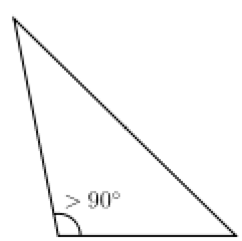
รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน (obtuse) มีมุมภายในมุมหนึ่งมีขนาดใหญ่กว่า 90° (มุมป้าน)

รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม (acute) มุมภายในทุกมุมมีขนาดเล็กกว่า 90° (มุมแหลม)

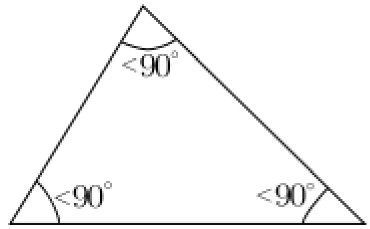
รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม แต่รูปสามเหลี่ยมมุมแหลมทุกรูปไม่ได้เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า



รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



รูปสามเหลี่ยมมุมป้าน



รูปสามเหลี่ยมมุมแหลม

4. เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม

เส้นขนาน หมายถึง เส้นตรงตั้งแต่สองเส้นขึ้นไปที่มีระยะทางระหว่างเส้นเท่ากันไปตลอดไม่ว่าจะลากต่อปลายออกไปยาวเท่าไรก็ตามจะไม่พบกัน นอกจากนี้เส้นโค้งก็ยังเป็นเส้นขนานได้ เรียกว่า โค้งขนาน เส้นตรงสองเส้นจะขนานกันต่อเมื่อเส้นตรงทั้งสอง มีระยะห่างเท่ากันเสมอ และใช้สัญลักษณ์ "// " แทนการขนาน จากรูปเส้นตรง รล ขนานกับเส้นตรง วย เพราะมีระยะห่างเท่ากัน การพิสูจน์ว่าเส้นตรงทั้งสองมีระยะห่างเท่ากัน มีขั้นตอนดังนี้คือ

ขั้นที่ 1 กำหนดจุดบนเส้นตรงเส้นใดเส้นหนึ่งอย่างน้อย 2 ตำแหน่ง โดยให้ตำแหน่งจุดที่กำหนดอยู่ค่อนปลายเส้นทางซ้ายและทางขวาที่ละตำแหน่ง

ขั้นที่ 2 ทำมุมฉาก ณ จุดที่กำหนด

ขั้นที่ 3 ลากเส้นมุมฉาก

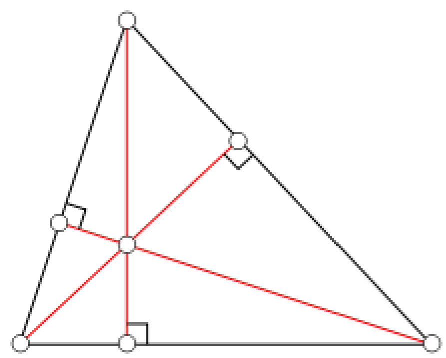
ขั้นที่ 3 ใช้ไม้บรรทัดวัดเส้นที่ลากเป็นมุมฉาก ว่ามีความยาวเท่ากันหรือไม่ ถ้าเท่าแสดงว่าเส้นตรงทั้งสองขนานกัน

รูปสามเหลี่ยม (อังกฤษ: triangle) เป็นหนึ่งในรูปร่างพื้นฐานในเรขาคณิต คือรูปหลายเหลี่ยมซึ่งมี3 มุม หรือจุดยอด และมี 3 ด้านหรือขอบที่เป็นส่วนของเส้นตรงรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอด *A*, *B*, และ *C* เขียนแทนด้วย *ABC*

ในเรขาคณิตแบบยุคลิดจุด 3 จุดใดๆ ที่ไม่อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน จะสามารถสร้างรูปสามเหลี่ยมได้เพียงรูปเดียว และเป็นรูปที่อยู่บนระนาบเดียว(เช่นระนาบสองมิติ)

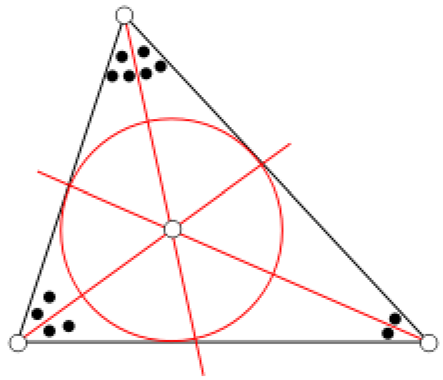
เส้นแบ่งครึ่งตั้งฉาก(perpendicular bisector) คือ เส้นตรงที่ลากผ่านจุดกึ่งกลางของด้าน และตั้งฉากกับด้านนั้น นั่นคือ ทำมุมฉากกับด้านนั้น เส้นแบ่งครึ่งตั้งฉากทั้งสามจะพบกันที่จุดเดียว คือ ศูนย์กลางวงล้อม (circumcenter) ของรูปสามเหลี่ยม จุดนี้เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลมล้อม(circumcircle) ซึ่งเป็นวงกลมที่ลากผ่านจุดยอดทั้งสาม เส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมสามารถหาได้จากกฎไซน์ที่กล่าวไปในข้างต้น

ทฤษฎีบทของธาลีส(Thales' theorem) กล่าวว่า ถ้าศูนย์กลางวงล้อมอยู่บนด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมแล้ว มุมตรงข้ามด้านนั้นจะเป็นมุมฉาก นอกจากนี้ ถ้าศูนย์กลางวงล้อมอยู่ในรูปสามเหลี่ยมแล้ว รูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม ถ้าศูนย์กลางวงล้อมอยู่นอกรูปสามเหลี่ยมแล้ว รูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน



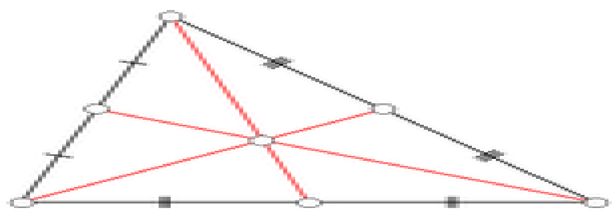
จุดตัดของส่วนสูงคือ จุดออร์โทเซนเตอร์

ส่วนสูง(altitude) ของรูปสามเหลี่ยม คือ เส้นตรงที่ลากผ่านจุดยอดและตั้งฉาก (ทำมุมฉาก)กับด้านตรงข้าม ด้านตรงข้ามนั้นเรียกว่า*ฐาน* (base) ของส่วนสูง และจุดที่ส่วนสูงตัดกับฐาน (หรือส่วนที่ขยายออกมา) นั้นเรียกว่า *เท้า* (foot)ของส่วนสูง ความยาวของส่วนสูงคือระยะทางระหว่างฐานกับจุดยอด ส่วนสูงทั้งสามจะตัดกันที่จุดเดียว เรียกจุดนั้นว่า จุดออร์โทเซนเตอร์(orthocenter)ของรูปสามเหลี่ยม จุดออร์โทเซนเตอร์จะอยู่ในรูปสามเหลี่ยมก็ต่อเมื่อรูปสามเหลี่ยมนั้นไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน จุดยอดทั้งสามและจุดออร์โทเซนเตอร์นั้นอยู่ในระบบออร์โทเซนตริก(orthocentric system)



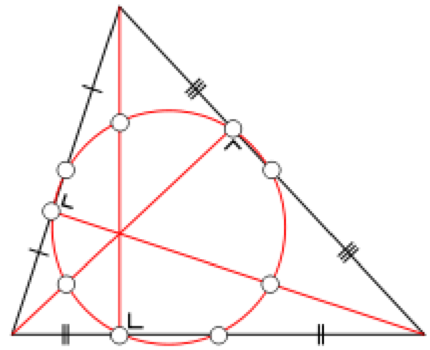
จุดตัดของเส้นแบ่งครึ่งมุม ใช้หาจุดศูนย์กลางของวงกลมแนบใน

เส้นแบ่งครึ่งมุม(angle bisector)คือ เส้นตรงที่ลากผ่านจุดยอด ซึ่งแบ่งมุมออกเป็นครึ่งหนึ่ง เส้นแบ่งครึ่งมุมทั้งสามจะตัดกันที่จุดเดียว คือ จุดศูนย์กลางของวงกลมแนบใน (incircle)ของรูปสามเหลี่ยม วงกลมแนบในคือวงกลมที่อยู่ในรูปสามเหลี่ยม และสัมผัสด้านทั้งสาม มีอีกสามวงกลมที่สำคัญคือ วงกลมแนบนอก (excircle)คือวงกลมที่อยู่นอกรูปสามเหลี่ยมและสัมผัสกับด้านหนึ่งด้านและส่วนที่ขยายออกมาทั้งสอง จุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในและวงกลมแนบนอกอยู่ในระบบออร์โทเซนตริก



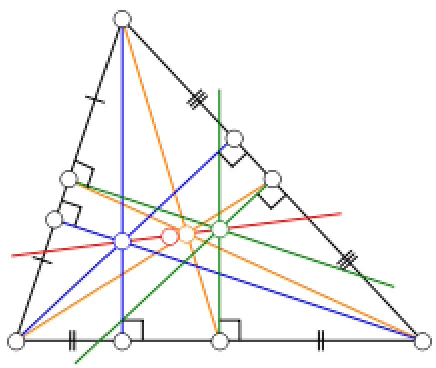
เซนทรอยด์เป็นศูนย์ถ่วง

เส้นมัธยฐาน (median) ของรูปสามเหลี่ยม คือ เส้นตรงที่ลากผ่านจุดยอดและจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้าม ซึ่งจะแบ่งรูปสามเหลี่ยมออกเป็นพื้นที่ที่เท่ากัน เส้นมัธยฐานทั้งสามจะตัดกันที่จุดเดียว คือ เซนทรอยด์ (centroid)ของรูปสามเหลี่ยม จุดนี้จะเป็นศูนย์ถ่วง (center of gravity) ของรูปสามเหลี่ยมด้วย ถ้ามีไม้ที่เป็นรูปสามเหลี่ยม คุณสามารถทำให้มันสมดุลได้ที่เซนทรอยของมันหรือเส้นใดๆที่ลากผ่านเซนทรอยด์ เซนทรอยด์จะแบ่งเส้นมัธยฐานด้วยอัตราส่วน 2:1 นั่นคือระยะทางระหว่างจุดยอดกับเซนทรอยด์ จะเป็นสองเท่าของระยะทางระหว่างเซนทรอยด์กับจุดกึ่งกลางของด้านตรงข้าม



วงกลมเก้าจุด แสดงความสมมาตรที่จุดหกจุดอยู่บนวงกลมเดียวกัน

จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสาม และเท้าของส่วนสูงทั้งสาม จะอยู่บนวงกลมเดียวกัน คือ วงกลมเก้าจุด (nine point circle) ของรูปสามเหลี่ยม อีกสามจุดที่เหลือคือจุดกึ่งกลางระหว่างจุดยอดกับจุดออร์โทเซนเตอร์ ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งของส่วนสูง รัศมีของวงกลมเก้าจุดจะเป็นครึ่งหนึ่งของรัศมีวงกลมล้อม มันจะสัมผัสวงกลมแนบใน (ที่จุด Feuerbach) และสัมผัสวงกลมแนบนอก



เส้นออยเลอร์ คือเส้นที่ลากผ่าน เซนทรอยด์ (สีเหลือง) , จุดออร์โทเซนเตอร์ (สีน้ำเงิน) , ศูนย์กลางวงล้อม (สีเขียว) และจุดศูนย์กลางของวงกลมเก้าจุด (สีแดง)

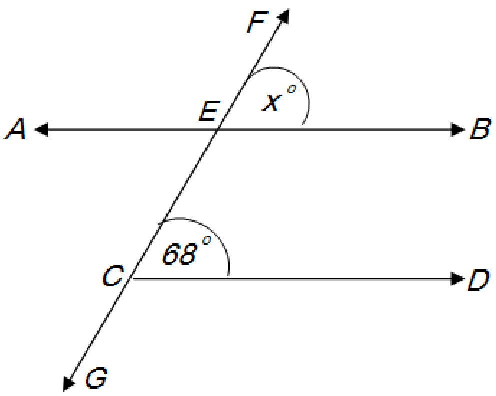
เซนทรอยด์ (สีเหลือง) , จุดออร์โทเซนเตอร์ (สีน้ำเงิน) , ศูนย์กลางวงล้อม (สีเขียว) และจุดศูนย์กลางของวงกลมเก้าจุด (จุดสีแดง) ทั้งหมดจะอยู่บนเส้นเดียวกัน ที่เรียกว่า เส้นออยเลอร์ (Euler's line) (เส้นสีแดง) จุดศูนย์กลางของวงกลมเก้าจุดจะอยู่กึ่งกลางระหว่างจุดออร์โทเซนเตอร์กับศูนย์กลางวงล้อม ระยะทางระหว่างเซนทรอยด์กับศูนย์กลางวงล้อมจะเป็นครึ่งหนึ่งของระยะทางระหว่างเซนทรอยด์กับจุดออร์โทเซนเตอร์

จุดศูนย์กลางของวงกลมแนบในโดยทั่วไปจะไม่อยู่บนเส้นออยเลอร์

ภาพสะท้อนของเส้นมัธยฐานที่เส้นแบ่งครึ่งมุมของจุดยอดเดียวกัน เรียกว่า symmedian symmedianทั้งสามจะตัดกันที่จุดเดียว คือ จุด symmedian (symmedian point) ของรูปสามเหลี่ยม

ตัวอย่างเรื่องเส้นขนาน

ตัวอย่างที่ 1



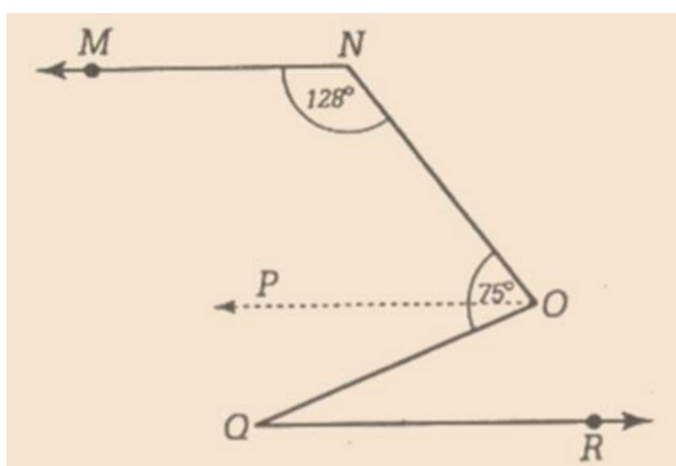
กำหนด $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ ดังรูป จงหาค่าของ X

วิธีทำ เนื่องจาก $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$

ดังนั้น มุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดจะมีขนาดเท่ากัน

นั่นคือ $X = 68^\circ$

ตัวอย่างที่ 2 ให้ NM//QR ถ้า $M\hat{N}O$ = 128 องศา และ $N\hat{O}Q$ = 75องศา แล้วจงหาขนาดของ $O\hat{Q}R$



ขนาดของ $O\hat{Q}R$ = 15 องศา

แบบฝึกหัดเรื่องเส้นขนาน

1 กำหนดให้ P (-3,2), Q (1,6), R (5,4) และ S (3,0) เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยม PQRS จงแสดงว่าจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยมนี้เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

2. จงแสดงว่าจุด A (-6,6), B (6,6), C(12,0) และ D (6,-6) เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

3. จงแสดงว่า จุดกึ่งกลางด้านของรุปสี่เหลี่ยมใดๆ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

เฉลยแบบฝึกหัดเรื่องเส้นขนาน

1.ให้จุด A , B , C และ D เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน PQ , QR , RS และ SP ดังนั้น หาพิกัดของจุดกึ่งกลางทั้งสี่ได้ดังนี้

$$A = \left(\frac{-3+1}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = (-1,4)$$

B = $\left(\frac{1+5}{2}, \frac{6+4}{2}\right) = (3,5)$

C = $\left(\frac{5+3}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = (4,2)$

D = $\left(\frac{3-3}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (0,1)$

ความชันของด้าน AB เท่ากับ $\frac{4-5}{-1-3} = \frac{1}{4}$

ความชันของด้าน BC เท่ากับ $\frac{5-2}{3-4} =$ -3

ความชันของด้าน CD เท่ากับ $\frac{2-1}{4-0} = \frac{1}{4}$

ความชันของด้าน DA เท่ากับ $\frac{1-4}{0+1} = -3$

จะเห็นว่าความชันของด้าน AB = ความชันของด้าน CD

และ ความชันของด้าน BC = ความชันของด้าน DA

ดังนั้น จุดกึ่งกลางของด้านทั้งสี่ของรูปสี่เหลี่ยม PQRS เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

2.ความชันของเส้นตรง AB = $\frac{6-6}{6-(-6)} = 0$

ความชันของเส้นตรง CD = $\frac{0-(-6)}{12-6} = 1$

ความชันของเส้นตรง BC = $\frac{0-6}{12-6} =-1$

ความชันของเส้นตรง AD = $\frac{-6-6}{6-(-6)} =-1$

จะเห็นว่าเส้นตรง BC = AD มีความชันเท่ากัน

ดังนั้น มีด้าน BC ขนานกัน AD เพียงคู่เดียวนั่นคือ A (-6,6) , B(6,6) , C(12,0) และ D(6,-6)เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

3.ให้ A(0 , 0) , B(x_1 ,0) , c(x_2,y_2)และ D(x_3,y_3) เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมใดๆ

P เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AB มีพิกัดเป็น $\left(\frac{x_1}{2},0\right)$

Q เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน BC มีพิกัดเป็น $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_2}{2}\right)$

R เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน CD มีพิกัดเป็น $\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2}\right)$

S เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน AD มีพิกัดเป็น $\left(\frac{x_3}{2},\frac{y_3}{2}\right)$

ความชันของ PQ = $\dfrac{\dfrac{y_2}{2} - 0}{\dfrac{x_1 + x_2}{2} - \dfrac{x_1}{2}} = \dfrac{y_2}{x_2}$

ความชันของ RS = $\dfrac{\dfrac{y_3 + y_3}{2} - \dfrac{y_3}{2}}{\dfrac{x_2 + x_3}{2} - \dfrac{x_3}{2}} = \dfrac{y_2}{x_2}$

ดังนั้น PQ ขนานกับ RS

ความชันของ QR = $\dfrac{\dfrac{y_2 + y_3}{2} - \dfrac{y_2}{2}}{\dfrac{x_2 + x_3}{2} - \dfrac{x_1 + x_2}{2}} = \dfrac{y_3}{x_3 - x_1}$

ความชันของ PS = $\dfrac{\dfrac{y_3}{2} - 0}{\dfrac{x_3}{2} - \dfrac{x_1}{2}} = \dfrac{y_3}{x_3 - x_1}$

ดังนั้น PS ขนานกับ QR แสดงว่า P,Q,R และ S เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน PQRS

อ้างอิงจาก

http://dit.dru.ac.th/math/lesson5/lineline_quiz.html

http://dit.dru.ac.th/math/5-4_5-5/ans54.htm

https://sites.google.com/site/bumbim54811426/hnwy-thi4-sen-khnan/4-3

https://sites.google.com/site/khnitsastrm2753/home/sen-khnan

http://e-learning.kusol.org/pluginfile.php/1411/mod_resource/content/1/M2_T2_CH4_2_content.pdf