เส้นขนาน

1. เส้นขนานและมุมภายใน

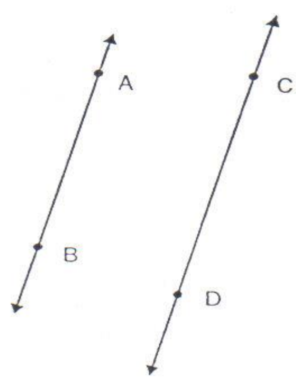
บทนิยาม	เส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกัน ขนานกันเมื่อเส้นตรงทั้งสองนี้ไม่ตัดกัน

เมื่อ $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{CD}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

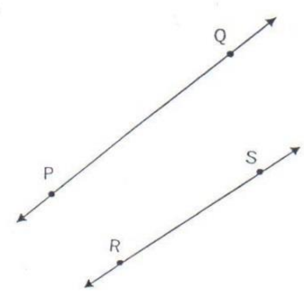
เส้นตรง m ขนานกับเส้นตรง n

จงพิจารณาว่า เส้นตรงคู่ใดขนานกัน

1)

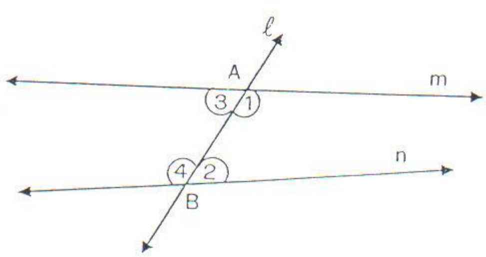


2)



นักเรียนจะเห็นว่าการพิจารณาเส้นตรงคู่ใดขนานกันโดยใช้บทนิยามนั้นอาจใช้ไม่สะดวก เพราะในหาจุดตัดของเส้นคู่ขนานนั้น นักเรียนอาจต้องเขียนรูปโดยลากเส้นให้ยาวออกไปมาก ๆ จึงเห็นว่าเส้นตรงทั้งสองตัดกัน

ต่อไปนี้เป็นวิธีอีกแบบหนึ่งจะพิจารณาว่าเส้นตรงคู่ใดขนานกัน โดยใช้มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด



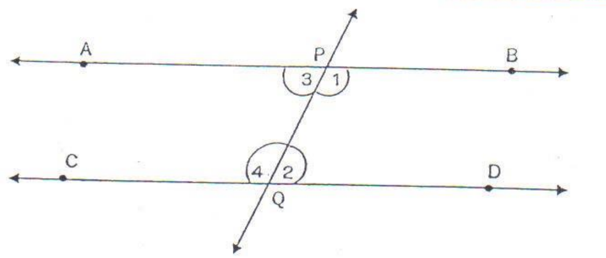
เส้นตรง l ตัดเส้นตรง m และ n ที่จุด A และจุด B

เรียกเส้นตรง l หรือ $\overleftrightarrow{AB}$ ว่าเส้นตัด AB

- เรียก $\hat{1}$ และ $\hat{2}$ ว่ามุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

- เรียก $\hat{3}$ และ $\hat{4}$ ว่ามุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัดมาตัดเส้นตรงทั้งสองแล้ว ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเป็น 180 องศา

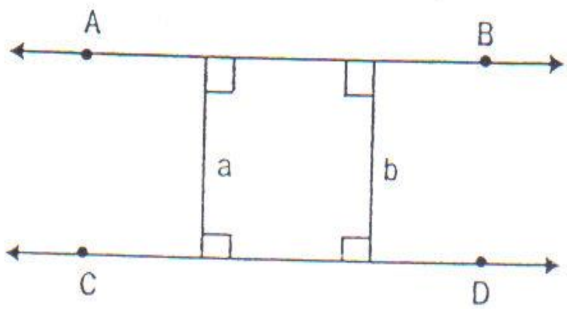


จากรูป $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{CD}$ และมีเส้นตัด PQ

จะได้ $\hat{1} + \hat{2} = 180^\circ$

และ $\hat{3} + \hat{4} = 180^\circ$

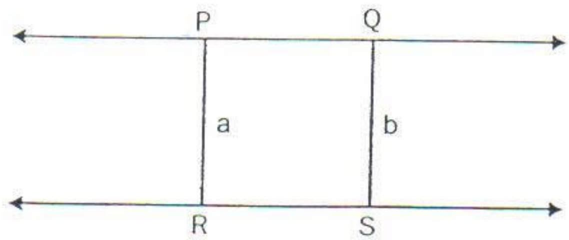
ถ้า $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{CD}$ a และ b แทนระยะระหว่างเส้นขนาน ดังรูป



นักเรียนคิดว่า a และ b เท่ากันหรือไม่...

โดยทั่วไป เส้นขนานคู่หนึ่งจะมีระยะระหว่างเส้นขนานเท่ากันเสมอ และในทางกลับกัน เมื่อเส้นตรงสองเส้นมีระยะระหว่างเส้นเท่ากันโดยตลอด เส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน

จากรูป



a และ b แทนระยะระหว่างเส้นขนาน

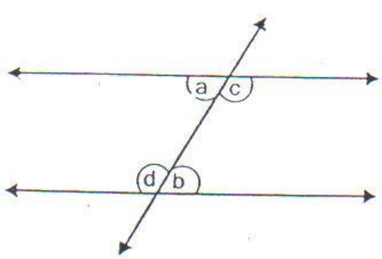
1) ถ้า $\overleftrightarrow{PQ}$ // $\overleftrightarrow{RS}$ แล้ว a = b

2) ถ้า a = b แล้ว $\overleftrightarrow{PQ}$ // $\overleftrightarrow{RS}$

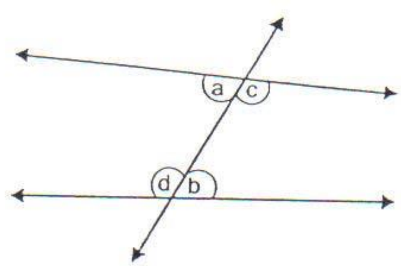
ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเป็น 180 องศา แล้วเส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน

2. เส้นขนานและมุมแย้ง

เส้นตรงที่ขนานกัน



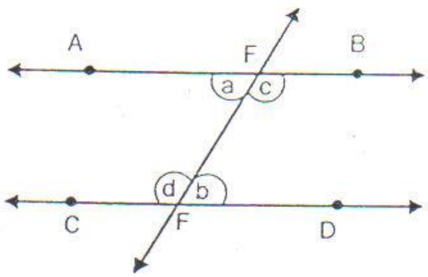
เส้นตรงที่ไม่ขนานกัน



จากรูป เรียกมุม a และมุม b ว่ามุมแย้ง

เรียกมุม c และมุม d ว่ามุมแย้ง

ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัดแล้ว มุมแย้งจะมีขนาดเท่ากัน

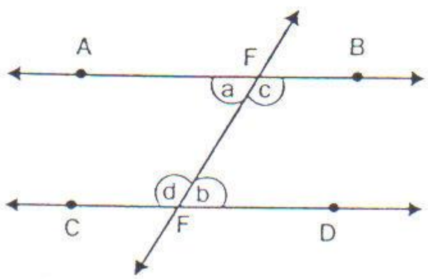


จากรูป $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{CD}$ และมี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด ทำให้เกิดมุมแย้ง จะได้ว่า

มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน คือ $\hat{a} = \hat{b}$

และ $\hat{c} = \hat{d}$

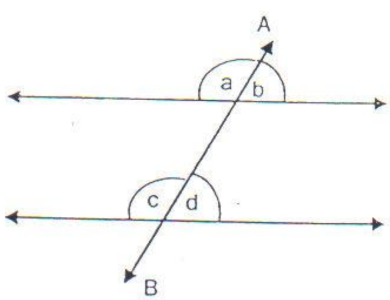
ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้เกิดมุมแย้งมีขนาดเท่ากันแล้ว เส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน

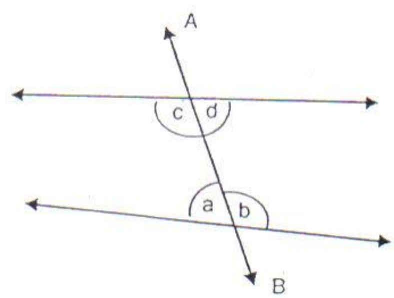


จากรูป $\overleftrightarrow{EF}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน คือ $\hat{a} = \hat{b}$ หรือ $\hat{c} = \hat{d}$ แล้วจะได้ว่า เส้นตรง $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{CD}$

3. เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน

จากรูป





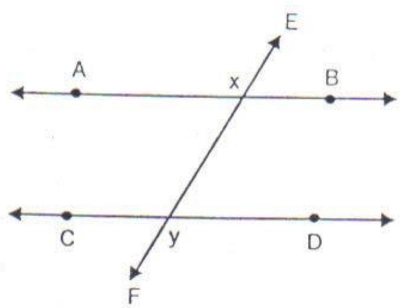
เราเรียก $\hat{a}$ และ $\hat{b}$ ว่ามุมภายนอก

$\hat{c}$ และ $\hat{d}$ ว่ามุมภายใน

$\hat{a}$ และ $\hat{c}$ เป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด AB

$\hat{b}$ และ $\hat{d}$ เป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด AB

ถ้าเส้นตัดสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัดแล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดจะมีขนาดเท่ากัน



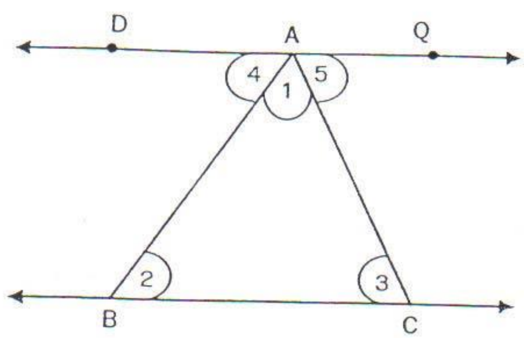
จากรูป $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ และมี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด จะได้ว่า

$A\hat{X}E = C\hat{Y}X$, $E\hat{X}B = X\hat{Y}D$

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งทำให้มุมภายนอก และมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากันแล้ว เส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน

4. รูปสามเหลี่ยมและเส้นขนาน

จากรูปสามเหลี่ยม ABC



มี $\overline{BC}$ เป็นฐานลาก $\overleftrightarrow{PQ}$ // $\overline{BC}$ และผ่านจุด A จะได้

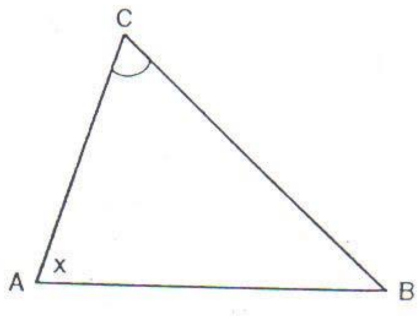
$\hat{2} = \hat{4}$ และ $\hat{3} = \hat{5}$

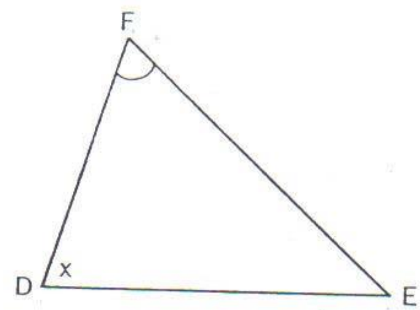
แต่ $\hat{1} + \hat{4} + \hat{5} = 180^\circ$ เพราะเป็นมุมตรง

ดังนั้น $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$ แทนค่าด้วยมุมที่เท่ากัน

สรุปได้ว่า

ขนาดของมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ รวมกันได้ 180 องศา





จากรูป ΔABC และ ΔDEF

มี $\quad C\hat{A}B = F\hat{D}E$

$\quad A\hat{C}B = D\hat{F}E$

และ $\quad A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B = 180^\circ$ (สมบัติมุมภายในรูปสามเหลี่ยม)

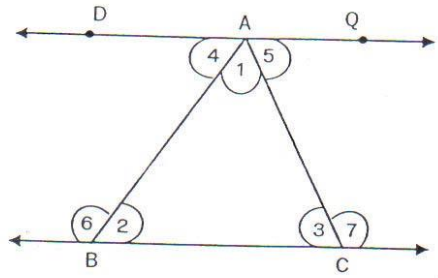
$\quad D\hat{E}F + E\hat{F}D + F\hat{D}E = 180^\circ$ (สมบัติมุมภายในรูปสามเหลี่ยม)

ดังนั้น $A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B = D\hat{E}F + E\hat{F}D + F\hat{D}E$ (ต่างเท่ากับ 180°)

แต่ $\quad C\hat{A}B = F\hat{D}E$ และ $A\hat{C}B = D\hat{F}E$ (กำหนดให้)

เพราะฉะนั้น $A\hat{B}C - D\hat{E}F$ (สมบัติการตัดออก)

ถ้ามุมของรูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีขนาดเท่ากันสองคู่แล้วมุมคู่ที่สามจะมีขนาดเท่ากันด้วย



กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC มี $\overline{BC}$ เป็นฐาน ลาก $\overleftrightarrow{PQ}$ // $\overline{BC}$ และผ่านจุด A

จะได้ $\hat{4} + \hat{6} = 180^\circ$ (มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด)

$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$ (ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม)

ดังนั้น $\hat{4} + \hat{6} = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3}$ (ต่างเท่ากับ 180)

แต่ $\hat{4} = \hat{2}$ (มุมแย้ง)

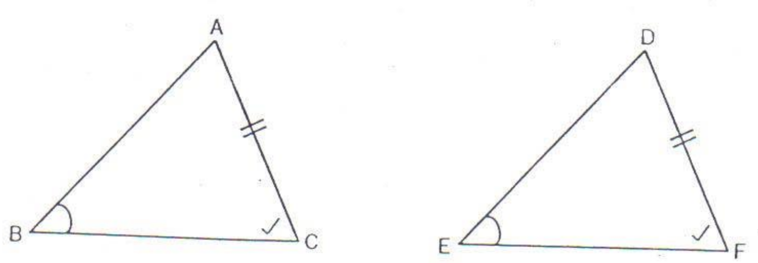
เพราะฉะนั้น $\hat{6} = \hat{1} + \hat{3}$ (สมบัติการตัดออก)

ในทำนองเดียวกัน $\hat{7} = \hat{1} + \hat{2}$

สรุปได้ว่า

ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด

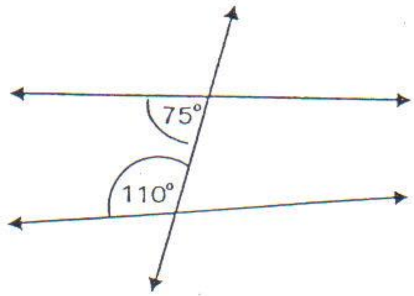
ความสัมพันธ์แบบ มุม – มุม – ด้าน



กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF มี $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$ และ $\overline{AC} = \overline{DF}$ จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม DEF ซึ่งเป็นความสัมพันธ์แบบ มุม – มุม – ด้าน (ม.ม.ด)

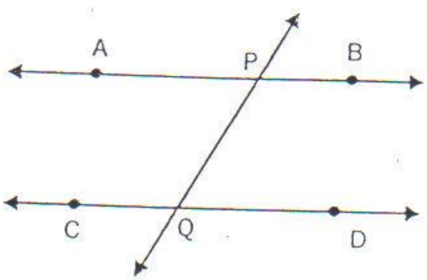
ตัวอย่าง

1.)จงพิจารณาว่าเส้นตรงแต่ละคู่ต่อไปนี้ขนานกันหรือไม่ เพราะเหตุใด



ตอบ ไม่ขนานเพราะ $75^\circ + 110^\circ \neq 180$

2.)จงพิจารณาว่ามุมคู่ใดที่เป็นมุมแย้ง

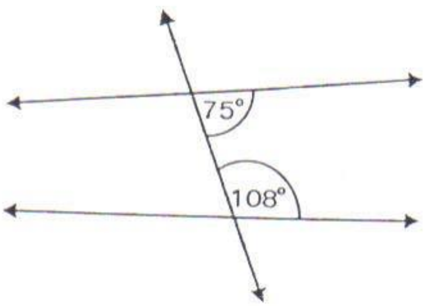


ตอบ $A\hat{P}Q$ แย้งกับ $P\hat{Q}D$ $B\hat{P}Q$ แย้งกับ $P\hat{Q}C$

แบบฝึกหัด

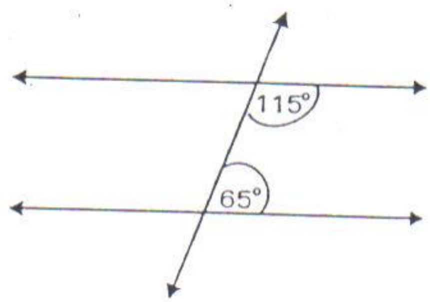
1.จงพิจารณาว่าเส้นตรงแต่ละคู่ต่อไปนี้ขนานกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

1)



……………………………………………….

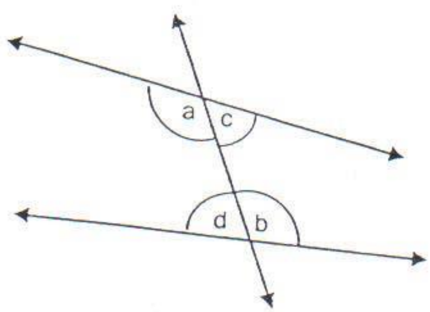
2)



………………………………………………..

2.จงพิจารณาว่ามุมคู่ใดที่เป็นมุมแย้ง

1.)

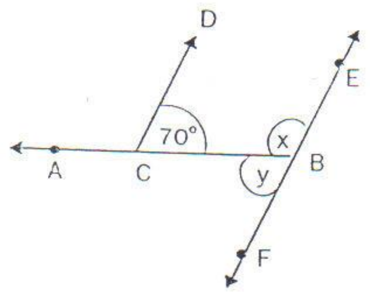


$\hat{a}$ แย้งกับ ....

$\hat{d}$ แย้งกับ ....

3.จงหาค่าตัวแปรในแต่ละข้อต่อไปนี้

1)



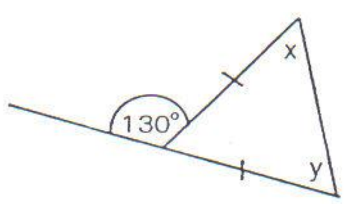
ให้ $\overrightarrow{CD}$ // $\overleftrightarrow{EF}$ และ $D\hat{D}B = 70^\circ$

$\hat{x}$ = ...

$\hat{y}$ = ...

4. จงหาค่า x , y จากรูปที่กำหนดให้

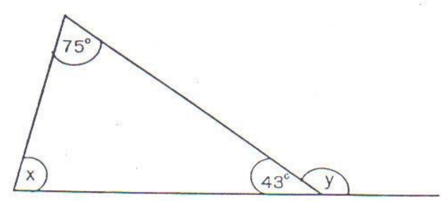
1)



$\hat{x}$ = ...

$\hat{y}$ = ...

2)



$\hat{x}$ = ...

$\hat{y}$ = ...

เฉลยแบบฝึกหัด

1. **เฉลย** 1) ไม่ขนานกันเพราะ $75^\circ + 108^\circ \neq 180^\circ$

2) ขนานกันเพราะ $115^\circ + 65^\circ = 180^\circ$

2.**เฉลย** 1) $P\hat{Q}D$

$P\hat{Q}C$

3.**เฉลย** 1) $\hat{x} = 110^\circ$, $\hat{y} = 70^\circ$

4.**เฉลย**

1. $\hat{x} = 65^\circ$, $\hat{y} = 65^\circ$
2. $\hat{x} = 62^\circ$, $\hat{y} = 137^\circ$