เส้นขนาน ชั้นมัธยาศึกษาปีที่ 2

1.เส้นขนานและมุมภายใน

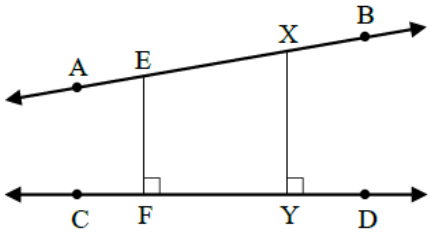
บทนิยาม เส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกัน ขนานกันเมื่อเส้นตรงทั้งสองนี้ไม่ตัดกัน

เมื่อ ขนานกับ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ //

เมื่อ AB และ CD ขนานกัน อาจกล่าวว่าAB ขนานกัน CD หรือ CD ขนานกัน ABอาจเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ AB // CD หรือCD // AB

ระยะห่างระหว่างเส้นขนาน

พิจารณารูปต่อไปนี้

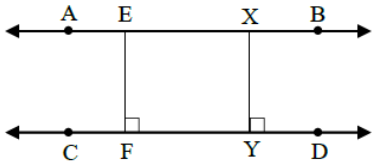


กำหนดให้ AB และ CD อยู่บนระนาบเดียวกัน E และ X เป็นจุดที่แตกต่างกันบน ABลาก EF ตั้งฉากกับ CD ที่จุด F และลาก XY ตั้งฉากกับ CD ที่จุด Y

เรียก EF ว่า **ระยะห่างระหว่าง** AB และ CD ที่วัดจากจุด E และ เรียก XY ว่า **ระยะห่างระหว่าง** AB และ CD ที่วัดจากจุด X

ในกรณีที่ $\overleftrightarrow{AB}$ และ CD ไม่ขนานกัน จะได้ว่า EF XY นั่นคือระยะห่างระหว่าง ABและ CD ที่วัดจากจุดที่แตกต่างกันบน AB จะไม่เท่ากัน

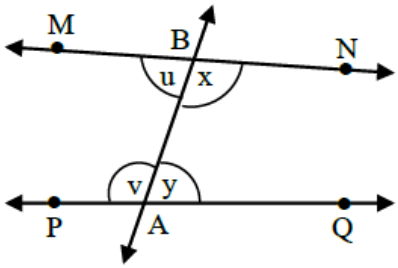
ในกรณีที่ $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกัน CD จะได้ว่า EF = XY นั่นคือระยะห่างระหว่าง AB และ CDที่วัดจากจุดที่แตกต่างกันบน AB จะเท่ากันเสมอ



ในกรณีทั่วไป **ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน แล้วระยะห่างระหว่างเส้นตรงคู่นั้นจะเท่ากันเสมอ**และในทางกลับกัน **ถ้าเส้นตรงสองเส้นมีระยะห่างระหว่างเส้นตรงเท่ากันเสมอ แล้วเส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน**

ในทางปฏิบัติ เมื่อต้องการตรวจสอบว่า เส้นตรงสองเส้นที่กำหนดให้ขนานกันหรือไม่ อาจตรวจสอบระยะห่างระหว่างเส้นตรงทั้งสองที่วัดจากจุดที่แตกต่างกันอย่างน้อยสองจุดบนเส้นตรงหนึ่งก็เพียงพอ

มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด



จากรูป AB เรียกว่า **เส้นตัด AB**

เรียก $\hat{x}$ และ $\hat{y}$ ว่า **มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด** AB และ

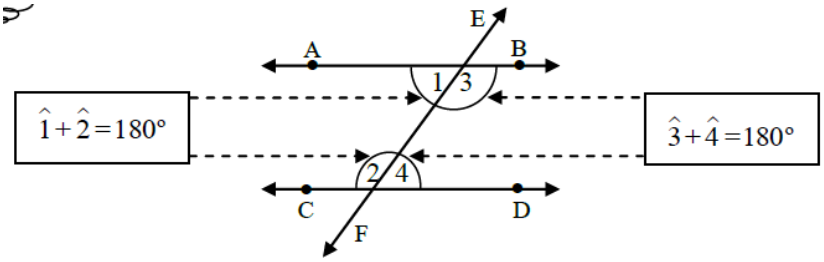
เรียก $\hat{u}$ และ $\hat{v}$ ว่า **มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด** AB ด้วย

ในการเขียนรูปเส้นตัด AB อาจใช้ $\overleftrightarrow{AB}$ หรือ AB แทน AB ก็ได้

สมบัติของเส้นขนาน

-เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ ขนาดของมุม ภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา

การนำไปใช้

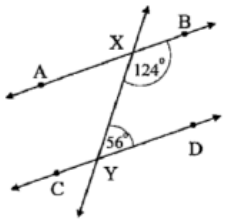


$\overleftrightarrow{AB}$ **จะขนานกับ** $\overleftrightarrow{CD}$ ก็ต่อเมื่อ

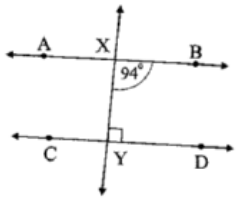
1. $\hat{1}+\hat{2}=180°$ หรือ
2. $\hat{3}+\hat{4}=180°$

ตัวอย่างที่ 1 $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ในแต่ละข้อขนานกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

1)



2)



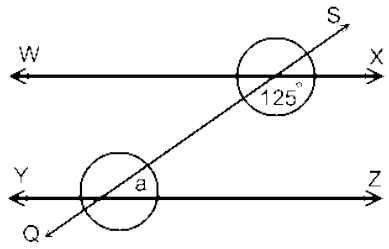
วิธีทำ 1) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

เพราะว่า ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 124 + 56 = 180 องศา

2) $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ไม่ขนานกัน

เพราะว่า ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 94 + 90 = 184 องศา ซึ่งไม่เท่ากับ 180 องศา

ตัวอย่าง **2จงหาค่าของมุม a ในกรณีต่อไปนี้**



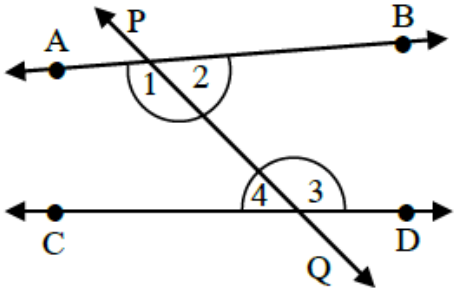
a = 180° - 125° = 55°

2.เส้นขนานและมุมแย้ง

จากรูป $\hat{1}$ และ $\hat{3}$ เรียกว่า **มุมแย้ง** เป็นมุมแย้งระหว่าง $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$
และ $\hat{2}$ และ $\hat{4}$ เรียกว่า **มุมแย้ง** เป็นมุมแย้งระหว่าง $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$

เส้นตรงสองเส้น ถ้ามีเส้นตรงตัด นอกจากจะเกิดมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของ เส้นตัดแล้ว ยังมีมุมภายในที่เรียกว่า มุมแย้ง อีกสองคู่

ถ้า และ เป็นเส้นตรงสองเส้น โดยมี เป็นเส้นตัด AB CD PQ



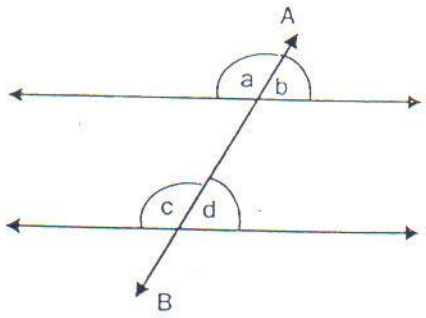
ทฤษฎีบท ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

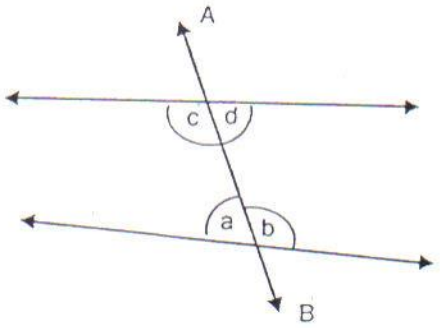
ทฤษฎีบท ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน

ทฤษฎีบท เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

3.เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน

จากรูป





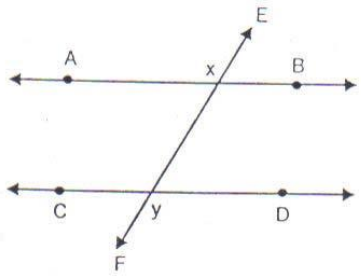
เราเรียก $\hat{a}$ และ $\hat{b}$ ว่ามุมภายนอก

$\hat{c}$ และ $\hat{d}$ ว่ามุมภายใน

$\hat{a}$ และ $\hat{c}$ เป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด AB

$\hat{b}$ และ $\hat{d}$ เป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด AB

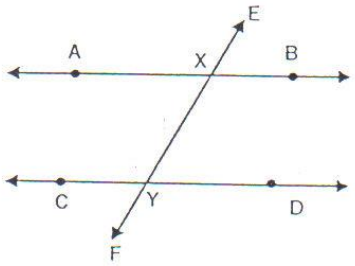
ถ้าเส้นตัดสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัดแล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อย่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดจะมีขนาดเท่ากัน



จากรูป $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ และมี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด จะได้ว่า

$\hat{AXE} = \hat{CYX}$, $\hat{EXB} = \hat{XYD}$

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งทำให้มุมภายนอก และมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากันแล้ว เส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน



จากรูปกำหนดให้ $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$

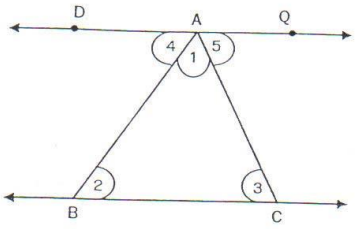
ทำให้

$\hat{AXE} = \hat{CYX}$, $\hat{EXB} = \hat{XYD}$

จะได้ว่า $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

4.เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม

จากรูปสามเหลี่ยม ABC



มี $\overline{BC}$ เป็นฐานลาก $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overline{BC}$ และผ่านจุด A จะได้

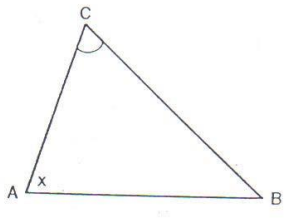
$\hat{2} = \hat{4}$ และ $\hat{3} = \hat{5}$

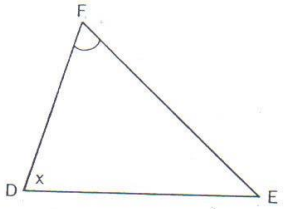
แต่ $\hat{1} + \hat{4} + \hat{5} = 180^\circ$ เพราะเป็นมุมตรง

ดังนั้น $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$ แทนค่าด้วยมุมที่เท่ากัน

สรุปได้ว่า

ขนาดของมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ





จากรูป ΔABC และ ΔDEF

มี $\hat{CAB} = \hat{FDE}$

$\hat{ACB} = \hat{DFE}$

และ $\hat{ABC} + \hat{BCA} + \hat{CAB} = 180^\circ$ (สมบัติมุมภายในรูปสามเหลี่ยม)

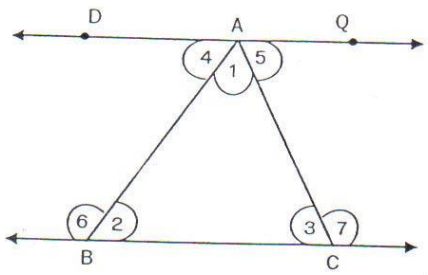
$\hat{DEF} + \hat{EFD} + \hat{FDE} = 180^\circ$ (สมบัติมุมภายในรูปสามเหลี่ยม)

ดังนั้น $\hat{ABC} + \hat{BCA} + \hat{CAB} = \hat{DEF} + \hat{EFD} + \hat{FDE}$ (ต่างเท่ากับ 180°)

แต่ $\hat{CAB} = \hat{FDE}$ และ $\hat{ACB} = \hat{DFE}$ (กำหนดให้)

เพราะฉะนั้น $\hat{ABC} - \hat{DEF}$ (สมบัติการตัดออก)

ถ้ามุมของรูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีขนาดเท่ากันสองคู่แล้วมุมคู่ที่สามจะมีขนาดเท่ากันด้วย



กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC มี $\overline{BC}$ เป็นฐาน ลาก $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overline{BC}$ และผ่านจุด A

จะได้ $\hat{4} + \hat{6} = 180^\circ$ (มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด)

$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180°$ (ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม)

ดังนั้น $\hat{4} + \hat{6} = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3}$ (ต่างเท่ากับ 180)

แต่ $\hat{4} = \hat{2}$ (มุมแย้ง)

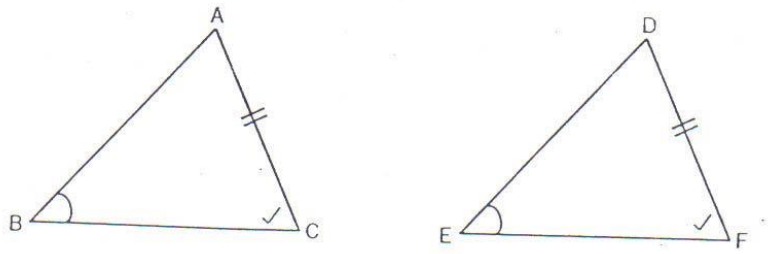
เพราะฉะนั้น $\hat{6} = \hat{1} + \hat{3}$ (สมบัติการตัดออก)

ในทำนองเดียวกัน $\hat{7} = \hat{1} + \hat{2}$

สรุปได้ว่า

ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด

ความสัมพันธ์แบบ มุม – มุม – ด้าน



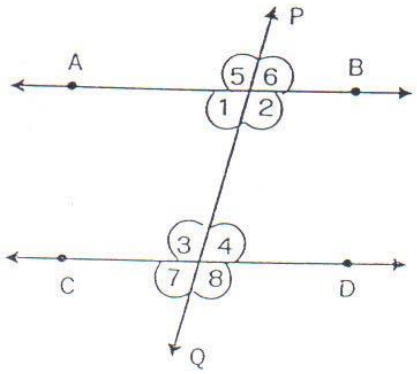
กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF มี $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$ และ $\overline{AC} = \overline{DF}$ จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม DEF ซึ่งเป็นความสัมพันธ์แบบ มุม – มุม – ด้าน (ม.ม.ด)

แบบฝึกหัด

1. เส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกัน จะขนานกันก็ต่อเมื่อ

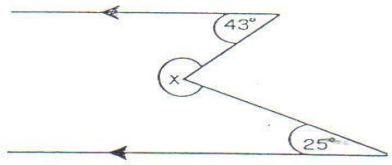
   1. เส้นตรงทั้งสองเส้นไม่ตัดกัน
   2. เส้นตรงทั้งสองเส้นยาวเท่ากัน
   3. เส้นตรงทั้งสองเส้นไม่ตั้งฉากกัน
   4. มีข้อถูกมากกว่า 1 ข้อ

2. จากรูปที่กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ ผลบวกของขนาดของมุมในข้อใดรวมกันเท่ากับ 180 องศา



   1. $\hat{5}$ กับ $\hat{8}$
   2. $\hat{4}$ กับ $\hat{6}$
   3. $\hat{3}$ กับ $\hat{2}$
   4. $\hat{2}$ กับ $\hat{7}$

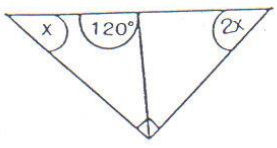
3. จากรูปมุม x มีขนาดกี่องศา



   1. 68°
   2. 108°
   3. 112°
   4. 137°

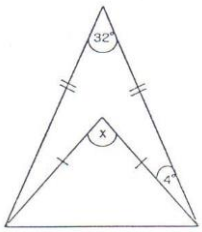
4. จากรูป $\hat{x}$ มีขนาดกี่องศา

   1. 15°
   2. 30°
   3. 35°
   4. 45°



5. จากรูป $\hat{x}$ มีขนาดกี่องศา

   1. 30°
   2. 40°
   3. 45°



4. 58°

เฉลย

1. (1) 2. (4) 3. (3) 4. (2) 5. (2)

ข้อมูลจาก http://www.m-mathmedia.com/download/files/parallelm2.pdf

http://www.mwk.ac.th/alluser/chantapa/iframe_sub9.html

http://www.myfirstbrain.com/student_view.aspx?ID=79036