

# เส้นขนาน

## 1. เส้นขนานและมุมภายใน

**บทนิยาม** เส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกัน ขนานกันเมื่อเส้นตรงทั้งสองนี้ไม่ตัดกัน

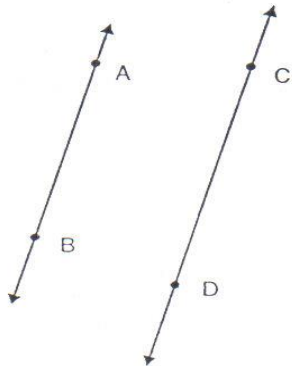
เมื่อ  $\overleftrightarrow{AB}$  ขนานกับ  $\overleftrightarrow{CD}$  เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$



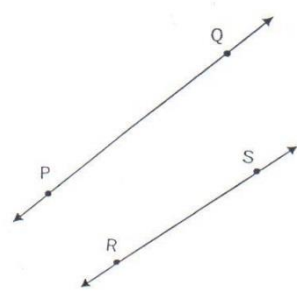
เส้นตรง  $m$  ขนานกับเส้นตรง  $n$

ให้พิจารณาว่า เส้นตรงคู่ใดขนานกัน

1)

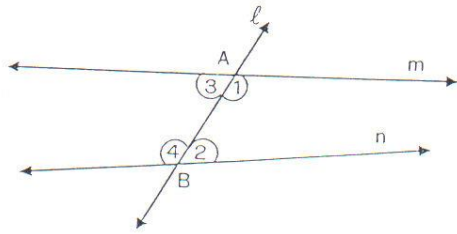


2)



พิจารณาเส้นตรงคู่ใดขนานกัน โดยใช้บทนิยามนั้นอาจใช้ไม่สะดวก เพราะในหาจุดตัดของเส้นคู่ขนานนั้น นักเรียนอาจต้องเขียนรูปโดยลากเส้นให้ยาวออกไปมาก ๆ จึงเห็นว่าเส้นตรงทั้งสองตัดกัน

ต่อไปนี้เป็นวิธีอีกแบบหนึ่งจะพิจารณาว่าเส้นตรงคู่ใดขนานกัน โดยใช้มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

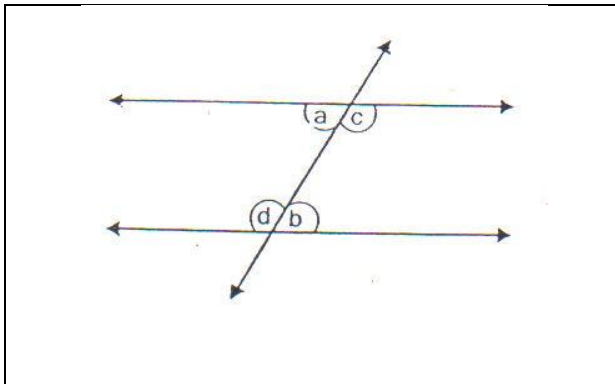


เส้นตรง  $l$  ตัดเส้นตรง  $m$  และ  $n$  ที่จุด  $A$  และจุด  $B$  เรียกเส้นตรง  $l$  หรือ  $\overleftrightarrow{AB}$  ว่าเส้นตัด  $AB$

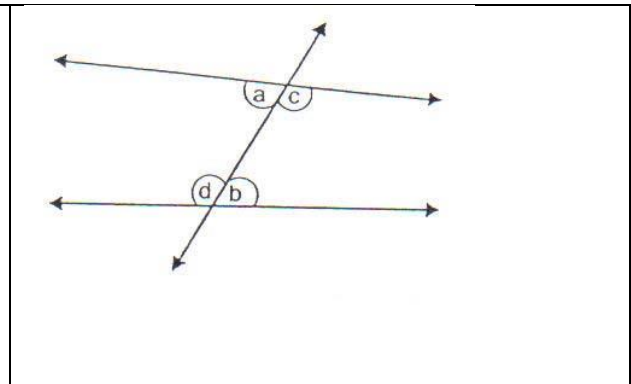
- เรียก  $\hat{1}$  และ  $\hat{2}$  ว่ามุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด
- เรียก  $\hat{3}$  และ  $\hat{4}$  ว่ามุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

## 2. เส้นขนานและมุมแย้ง

เส้นตรงที่ขนานกัน



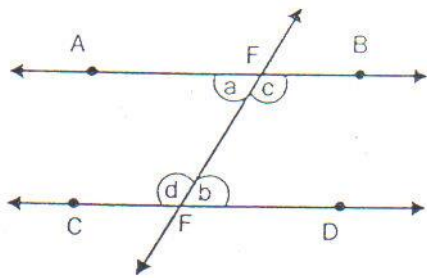
เส้นตรงที่ไม่ขนานกัน



จากรูป เรียกมุม  $a$  และมุม  $b$  ว่ามุมแย้ง

เรียกมุม  $c$  และมุม  $d$  ว่ามุมแย้ง

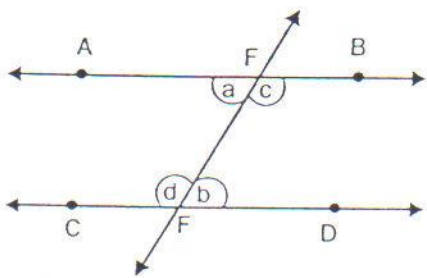
ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัดแล้ว มุมแย้งจะมีขนาดเท่ากัน



จากรูป  $\overleftrightarrow{AB}$  ขนานกับ  $\overleftrightarrow{CD}$  และมี  $\overleftrightarrow{EF}$  เป็นเส้นตัด ทำให้เกิดมุมแย้ง จะได้ว่า

มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน คือ  $\hat{a} = \hat{b}$   
และ  $\hat{c} = \hat{d}$

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้เกิดมุมแย้งมีขนาดเท่ากันแล้ว เส้นตรงคู่นั้น

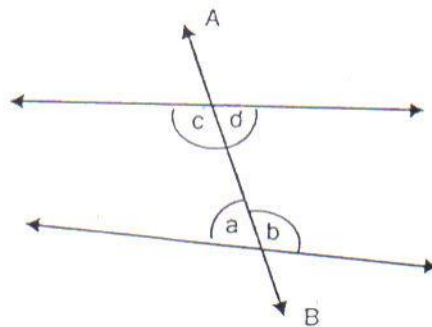
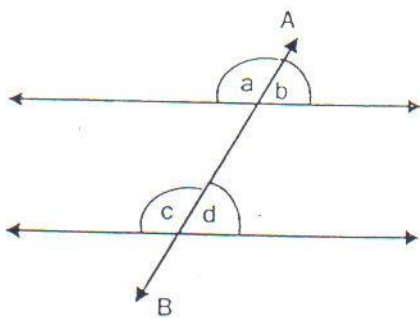


จากรูป  $\overleftrightarrow{EF}$  ตัด  $\overleftrightarrow{AB}$  และ  $\overleftrightarrow{CD}$  ทำให้มุมแย้ง

มีขนาดเท่ากัน คือ  $\hat{a} = \hat{b}$  หรือ  $\hat{c} = \hat{d}$   
แล้วจะได้ว่า เส้นตรง  $\overleftrightarrow{AB}$  ขนานกับ  $\overleftrightarrow{CD}$

### 3. เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน

จากรูป



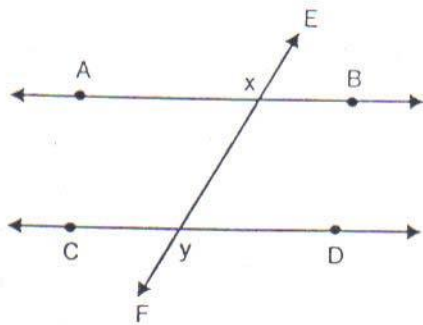
เราเรียก  $\hat{a}$  และ  $\hat{b}$  ว่ามุมภายนอก

$\hat{c}$  และ  $\hat{d}$  ว่ามุมภายใน

$\hat{a}$  และ  $\hat{c}$  เป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด AB

$\hat{b}$  และ  $\hat{d}$  เป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด AB

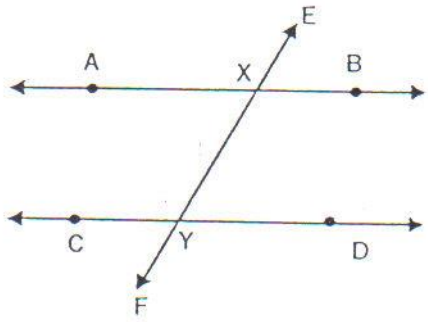
ถ้าเส้นตัดสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัดแล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดจะมีขนาดเท่ากัน



จากรูป  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$  และมี  $\overleftrightarrow{EF}$  เป็นเส้นตัด  
จะได้ว่า

$$\hat{a} = \hat{g}, \hat{b} = \hat{h}, \hat{c} = \hat{g}, \hat{d} = \hat{h}$$

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งทำให้มุมภายนอก และมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากันแล้ว เส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน



จากรูปกำหนดให้  $\overleftrightarrow{EF}$  เป็นเส้นตัด  $\overleftrightarrow{AB}$  และ

$\overleftrightarrow{CD}$

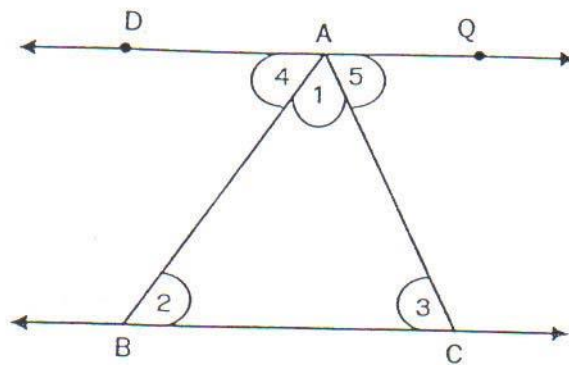
ทำให้

$$\hat{AXE} = \hat{CYX}, \hat{EXB} = \hat{XYD}$$

จะได้ว่า  $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

#### 4. รูปสามเหลี่ยมและเส้นขนาน

จากรูปสามเหลี่ยม ABC



มี  $\overleftrightarrow{BC}$  เป็นฐานลาก  $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overleftrightarrow{BC}$  และผ่านจุด A จะได้

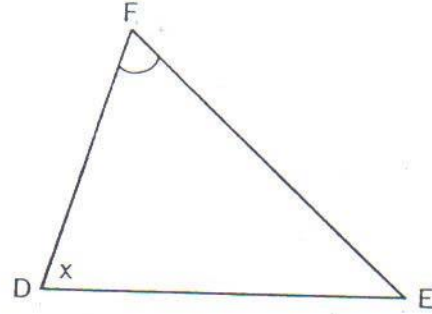
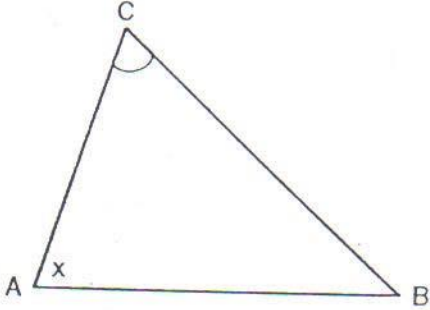
$$\hat{2} = \hat{4} \text{ และ } \hat{3} = \hat{5}$$

แต่  $\hat{1} + \hat{4} + \hat{5} = 180^\circ$  เพราะเป็นมุมตรง

ดังนั้น  $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$  แทนค่าด้วยมุมที่เท่ากัน

สรุปได้ว่า

ขนาดของมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ รวมกันได้ 180



จากรูป  $\triangle ABC$  และ  $\triangle DEF$

$$\text{มี } \hat{CAB} = \hat{FDE}$$

$$\hat{ACB} = \hat{DFE}$$

$$\text{และ } \hat{ABC} + \hat{BCA} + \hat{CAB} = 180^\circ \text{ (สมบัติมุมภายในรูปสามเหลี่ยม)}$$

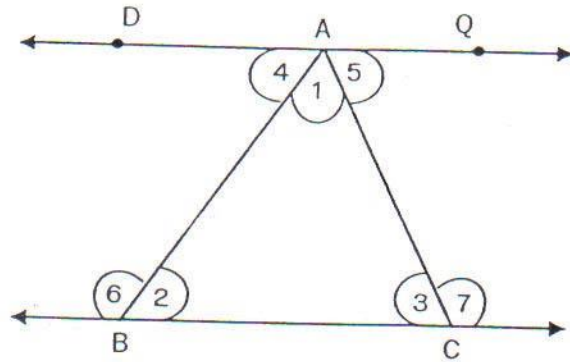
$$\hat{DEF} + \hat{EFD} + \hat{FDE} = 180^\circ \text{ (สมบัติมุมภายในรูปสามเหลี่ยม)}$$

$$\text{ดังนั้น } \hat{ABC} + \hat{BCA} + \hat{CAB} = \hat{DEF} + \hat{EFD} + \hat{FDE} \text{ (ต่างเท่ากับ } 180^\circ)$$

$$\text{แต่ } \hat{CAB} = \hat{FDE} \text{ และ } \hat{ACB} = \hat{DFE} \text{ (กำหนดให้)}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \hat{ABC} = \hat{DEF} \text{ (สมบัติการตัดออก)}$$

ถ้ามุมของรูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีขนาดเท่ากันสองคู่แล้วมุมคู่ที่สามจะมีขนาดเท่ากันด้วย



กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC มี  $\overline{BC}$  เป็นฐาน ลาก  $\overrightarrow{PQ} \parallel \overline{BC}$  และผ่านจุด A

จะได้  $\hat{4} + \hat{6} = 180^\circ$  (มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด)

$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$  (ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม)

ดังนั้น  $\hat{4} + \hat{6} = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3}$  (ต่างเท่ากับ 180)

แต่  $\hat{4} = \hat{2}$  (มุมแย้ง)

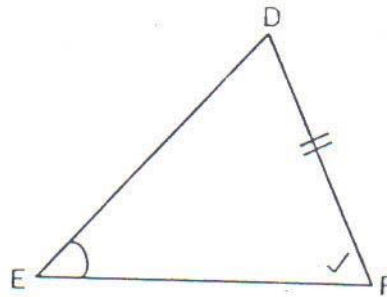
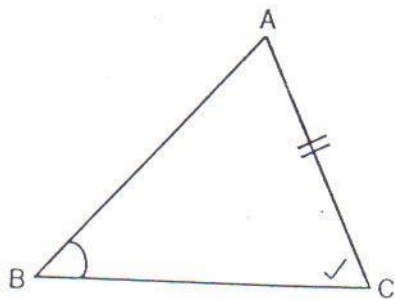
เพราะฉะนั้น  $\hat{6} = \hat{1} + \hat{3}$  (สมบัติการตัดออก)

ในทำนองเดียวกัน  $\hat{7} = \hat{1} + \hat{2}$

สรุปได้ว่า

ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด

## ความสัมพันธ์แบบ มุม – มุม – ด้าน



กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF มี  $\hat{B} = \hat{E}$  ,  $\hat{C} = \hat{F}$  และ

$\overline{AC} = \overline{DF}$  จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม DEF ซึ่งเป็นความสัมพันธ์แบบ มุม – มุม – ด้าน (ม.ม.ด)

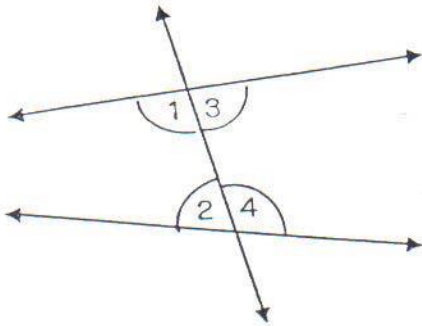
แหล่งที่มา :: [tc.mengrai.ac.th/siriporn\\_mr/senkhanan.doc](http://tc.mengrai.ac.th/siriporn_mr/senkhanan.doc)

<https://docs.google.com/presentation/d/1zGxcCdwXeSMsoq1u-YbNyZuIF-JywH7FQzGHraFjudg/edit?pli=1#slide=id.i5>

## แบบฝึกหัด

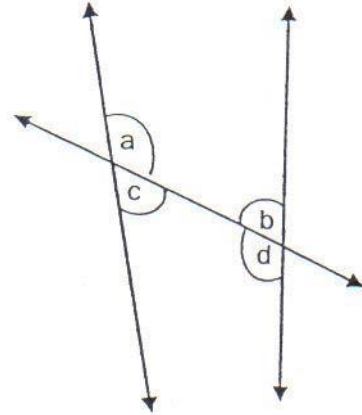
1. ให้นักเรียนบอกมุมคูใดที่เป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

1)



$\hat{1}$  กับ  $\hat{2}$  และ .....

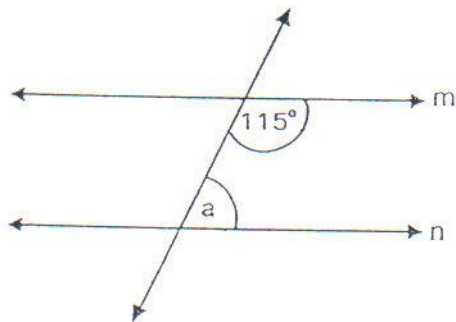
2)



$\hat{a}$  กับ  $\hat{b}$  และ .....

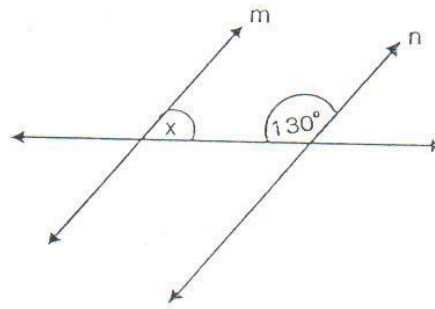
2. กำหนดเส้นตรง  $m$  และ  $n$  ขนานกันและมีเส้นตัดให้นักเรียนหาค่าของตัวแปรในแต่ละข้อ

1)



$\hat{a} = \dots\dots\dots$

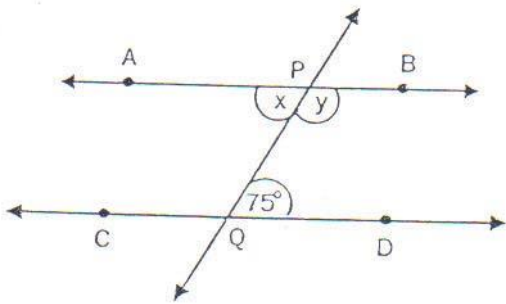
2)



$\hat{x} = \dots\dots\dots$

3. ให้นักเรียนหาค่า  $x$  และ  $y$  ในแต่ละข้อต่อไปนี้ พร้อมทั้งให้เหตุผลประกอบ

1)

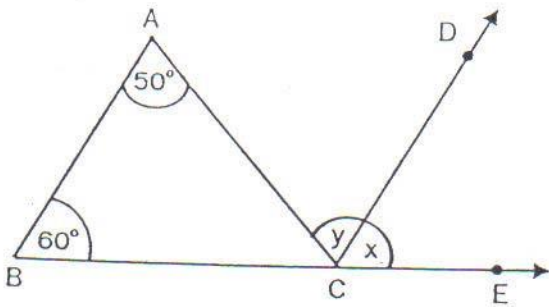


กำหนด  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$  และ  $\hat{PQD} = 75^\circ$

$x = \dots\dots\dots$

$y = \dots\dots\dots$

2)



กำหนด  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$

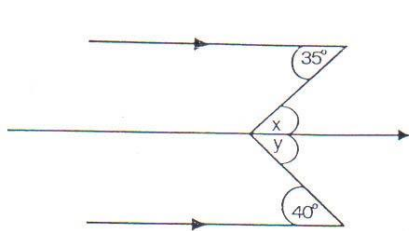
$\hat{BAC} = 50^\circ$

$\hat{ABC} = 60^\circ$

$\hat{ACE} = \dots\dots\dots$

4. ให้นักเรียนหาค่าตัวแปรในแต่ละข้อต่อไปนี้

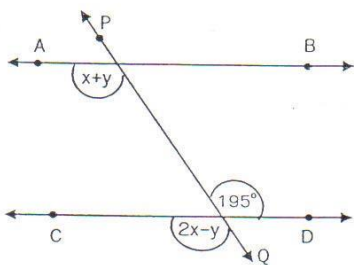
5)



$x = \dots\dots\dots$

$y = \dots\dots\dots$

6)



ให้  $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$

$x + y = \dots\dots\dots$

$2x - y = \dots\dots\dots$

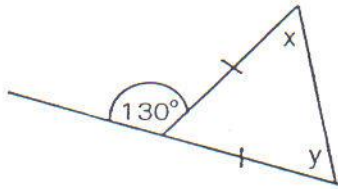
$x =$

.....

$y =$  .....

5. จงหาค่า  $x$  ,  $y$  จากรูปที่กำหนดให้

1)



$x =$

.....

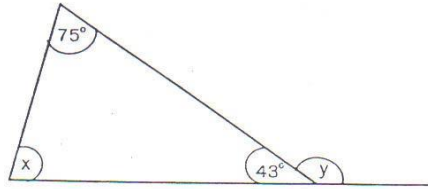
.....

$y =$

.....

.....

2)



$x =$

.....

.....

$y =$

.....

.....

## เฉลยแบบฝึกหัด

1. เฉลย 1)  $\hat{3}$  กับ  $\hat{4}$

2)  $\hat{e}$  กับ  $\hat{d}$

2. เฉลย 1)  $\hat{a} = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$

2)  $\hat{x} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

3. เฉลย 1)  $\hat{x} = 75^\circ$  (มุมแย้ง)

$$\begin{aligned}\hat{y} &= 180^\circ - 75^\circ \text{ (ผลบวกของมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัด)} \\ &= 105^\circ\end{aligned}$$

2)  $\hat{y} = 50^\circ$  (มุมแย้ง)

$$\begin{aligned}\hat{x} &= 180^\circ - \hat{y} - \hat{ABC} \text{ (ขนาดของมุมตรง)} \\ &= 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ \\ &= 60^\circ\end{aligned}$$

4. เฉลย 1)  $\hat{x} = 35^\circ$  ,  $\hat{y} = 40^\circ$

2)  $\hat{x} + \hat{y} = 135^\circ$

5. เฉลย 1)  $\hat{x} = 65^\circ$  ,  $\hat{y} = 65^\circ$

2)  $\hat{x} = 62^\circ$  ,  $\hat{y} = 137^\circ$