

คำนำ

วิชาคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เป็นนามธรรม เนื้อหาบางเรื่องยากที่จะอธิบายให้นักเรียนทุกคนเข้าใจได้พร้อมกัน สื่อการเรียนการสอนจะมีส่วนช่วยให้นักเรียนทุกคนมีความสนใจในการศึกษาหาความรู้ และทำให้นักเรียนมีความสุข ความรู้สึที่ดีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์

นอกจากนี้การเรียนรู้ของแต่ละบุคคลใช้เวลาไม่เท่าเทียมกัน นักเรียนบางคนเรียนรู้ได้ช้า ดังนั้นชุดการเรียนชุดนี้จะช่วยให้นักเรียนได้ศึกษาหาความรู้เพิ่มเติม หรือเรียนซ่อมเสริมในเรื่องสั้น ขนาน อีกทั้งช่วยให้นักเรียนรู้จักการใช้เวลาว่างให้เป็นประโยชน์

ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าชุดการเรียนนี้จะเป็นประโยชน์ต่อครู และนักเรียนที่ได้นำไปศึกษา อย่างไรก็ตามอาจมีข้อบกพร่องอยู่บ้าง ซึ่งผู้จัดทำจะพยายามปรับปรุงแก้ไขให้ถูกต้องและสมบูรณ์

ลงชื่อ.....

(นางสิริพร ค่านบุญเรือง)

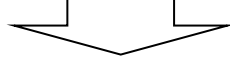
กลุ่มสาระคณิตศาสตร์

คำแนะนำในการใช้ชุดการเรียนรู้

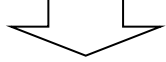
บทเรียนนี้ นักเรียนสามารถศึกษาได้ด้วยตนเองโดยปฏิบัติตามดังนี้

1. ให้ศึกษาบทเรียนนี้ตามลำดับ และปฏิบัติตามคำแนะนำอย่างเคร่งครัด
2. การตอบคำถามและทำแบบฝึกหัดให้ทำในกระดาษอื่น แล้วตรวจคำตอบซึ่งมีเฉลยในหน้าถัดไป
3. ควรตอบคำถามและทำแบบฝึกหัดให้เสร็จก่อนที่จะเปิดดูเฉลย
4. ชุดการเรียนรู้ประกอบด้วย
 - 4.1 ประเมินผลก่อนเรียน
 - 4.2 สรุปเนื้อหา
 - 4.3 แบบฝึกพัฒนาการเรียนรู้
 - 4.4 ประเมินผลหลังเรียน

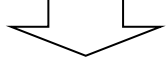
ลำดับชั้นการเรียนรู้



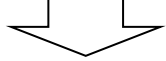
สังเกต



ทำตามแบบ



ทำโดยไม่มีแบบ



สรุปกฎเกณฑ์

เส้นขนาน

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

- 1) บอกสมบัติของเส้นขนาน และบอกเงื่อนไขที่ทำให้เส้นตรงสองเส้นขนานกันได้
- 2) ระบุได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – มุม – ด้าน เท่ากันทุกประการ
- 3) ใช้สมบัติเกี่ยวกับเส้นขนานและความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมในการใช้เหตุผล และแก้โจทย์ปัญหาได้

แบบทดสอบก่อนเรียน



คำชี้แจง

1. ข้อสอบชุดนี้มี 20 ข้อ ใช้เวลา 45 นาที
2. พยายามทำอย่างรวดเร็ว และถูกต้องมากที่สุด

คำสั่ง

ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดเพียงข้อเดียวและตอบลงในกระดาษคำตอบ

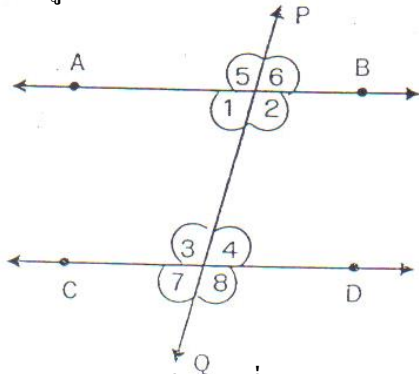


ทำให้เสร็จ
ทันเวลานะจ๊ะ

แบบทดสอบก่อนเรียน

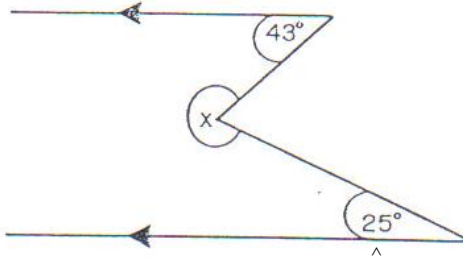
จงเลือกข้อที่ถูกที่สุดเพียงข้อเดียว

1. เส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกัน จะขนานกันก็ต่อเมื่อ
 1. เส้นตรงทั้งสองเส้นไม่ตัดกัน
 2. เส้นตรงทั้งสองเส้นยาวเท่ากัน
 3. เส้นตรงทั้งสองเส้นไม่ตั้งฉากกัน
 4. มีข้อถูกมากกว่า 1 ข้อ
2. จากรูปที่กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ผลบวกของขนาดของมุมในข้อใดรวมกันเท่ากับ 180 องศา



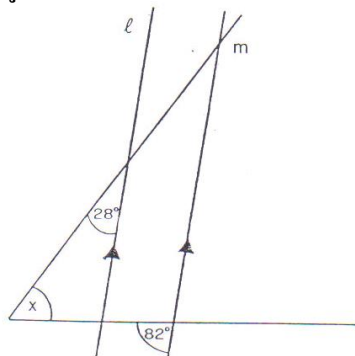
1. $\hat{5}$ กับ $\hat{8}$
2. $\hat{4}$ กับ $\hat{6}$
3. $\hat{3}$ กับ $\hat{2}$
4. $\hat{2}$ กับ $\hat{7}$

3. จากรูปมุม x มีขนาดกี่องศา



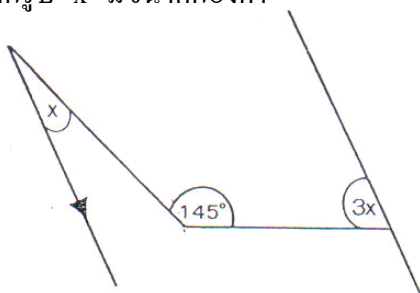
1. 68°
2. 108°
3. 112°
4. 137°

4. จากรูปที่กำหนดให้ เส้น $l \parallel m$ x มีขนาดกี่องศา



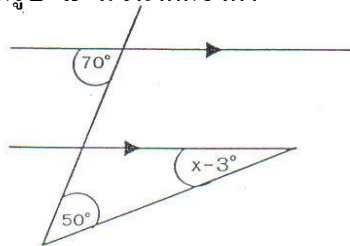
1. 39°
2. 54°
3. 70°
4. 82°

5. จากรูป x มีขนาดกี่องศา



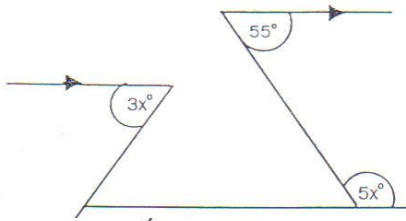
1. 17.5°
2. 11.5°
3. 8.5°
4. 5°

6. จากรูป x มีขนาดกี่องศา



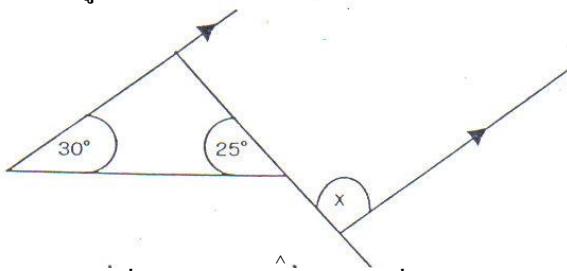
1. 17°
2. 20°
3. 23°
4. 25°

7. จากรูปที่กำหนดให้มุม $3x$ มีขนาดกี่องศา



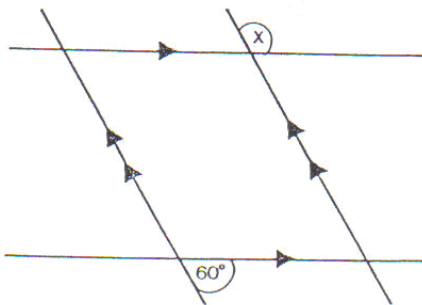
1. 25°
2. 35°
3. 65°
4. 75°

8. จากรูปที่กำหนดให้ x มีขนาดกี่องศา



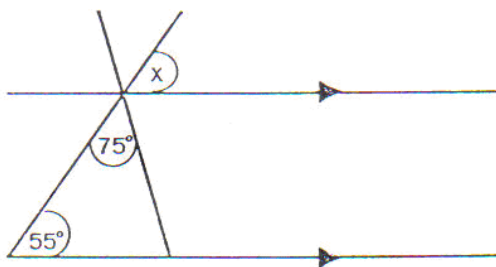
1. 55°
2. 105°
3. 125°
4. 135°

9. จากรูปที่กำหนดให้ x มีขนาดกี่องศา



1. 120°
2. 110°
3. 105°
4. 100°

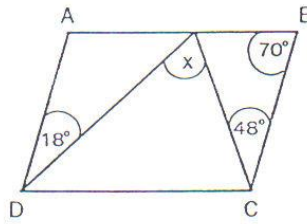
10. จากรูปที่กำหนดให้ x มีขนาดกี่องศา



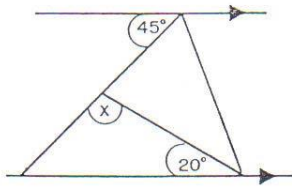
1. 50°
2. 55°
3. 65°
4. 75°

11. กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน x° มีขนาดกี่องศา

1. 55°
2. 66°
3. 76°
4. 86°

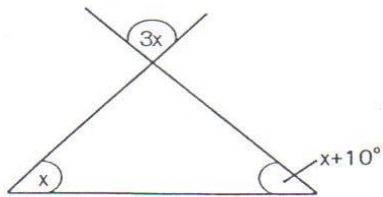


12. จากรูป x° มีขนาดกี่องศา



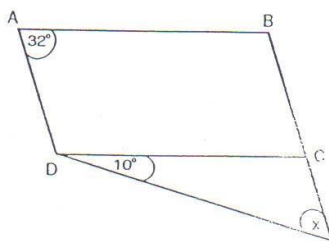
1. 100°
2. 108°
3. 110°
4. 115°

13. จากรูป x° มีขนาดกี่องศา



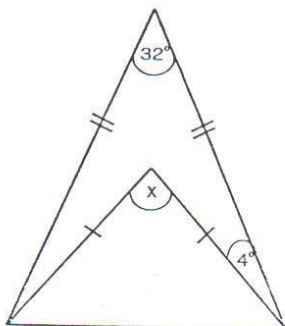
1. 34°
2. 35°
3. 82°
4. 102°

14. กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน x° มีขนาดกี่องศา



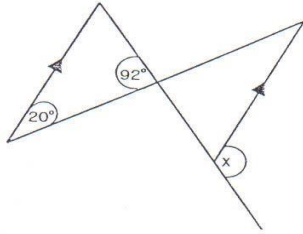
1. 11°
2. 15°
3. 22°
4. 32°

15. จากรูป x° มีขนาดกี่องศา



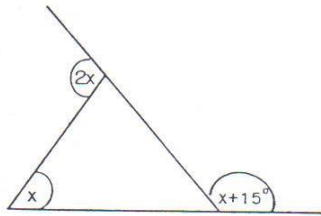
1. 30°
2. 40°
3. 45°
4. 58°

16. จากรูป \hat{x} มีขนาดกี่องศา



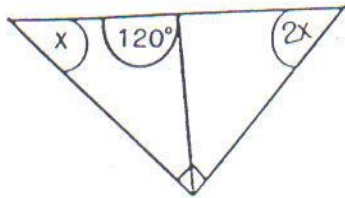
1. 92°
2. 100°
3. 112°
4. 120°

17. จากรูป \hat{x} มีขนาดกี่องศา



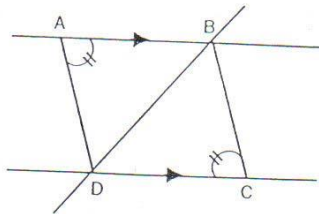
1. 75°
2. 76.5°
3. 82.5°
4. 85°

18. จากรูป \hat{x} มีขนาดกี่องศา



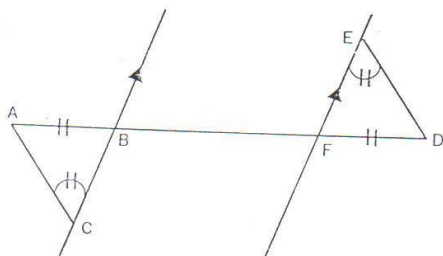
1. 15°
2. 30°
3. 35°
4. 45°

19. จากรูป $AB \parallel CD$ $\triangle ABD$ เท่ากันทุกประการกับ $\triangle BCD$ ด้วยเหตุผลใด



1. ม.ด.ม
2. ม.ม.ด.
3. ค.ค.ค.
4. ม.ม.ม.

20. จากรูปที่กำหนดให้ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ด้วยเหตุผลใด



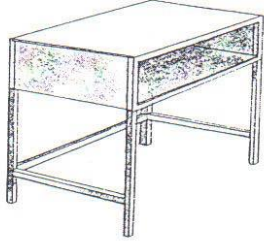
1. ค.ค.ค.
2. ม.ด.ม.
3. ม.ม.ด.
4. ม.ม.ม.

เฉลยแบบทดสอบ (ก่อนเรียน) เพื่อประเมินผลการเรียนรู้
เรื่องเส้นขนาน

- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1. (1) | 2. (4) | 3. (3) | 4. (2) | 5. (1) |
| 6. (3) | 7. (4) | 8. (3) | 9. (1) | 10. (2) |
| 11. (2) | 12. (4) | 13. (1) | 14. (3) | 15. (2) |
| 16. (3) | 17. (3) | 18. (2) | 19. (2) | 20. (3) |

ในชีวิตประจำวัน เราใช้ความรู้เกี่ยวกับเส้นขนานมาช่วยตกแต่งสรรค์สร้างวัสดุอุปกรณ์
สิ่งจำเป็นต่าง ๆ เพื่อประโยชน์ในการใช้สอยมากมาย

เส้นขนานกับอุปกรณ์ต่าง ๆ



ด้านยาวและด้านกว้างของโต๊ะทั้งสองด้านขนานกัน
ช่วยสร้างความสะดวกในการใช้และความสวยงาม วัสดุ
อุปกรณ์ของอาคารบ้านเรือนส่วนใหญ่ใช้เส้นขนาน

เส้นขนานบนท้องถนน

ความรู้เกี่ยวกับเส้นขนานใช้บนท้องถนน

ช่วยให้ความสะดวกในการใช้รถ ใช้ถนน

และแก้ปัญหาการจราจรได้มาก

เส้นขนานบนรางรถไฟหรือรถไฟฟ้า

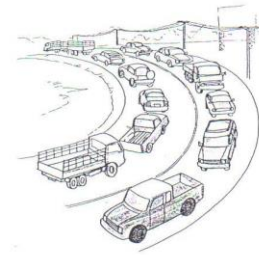
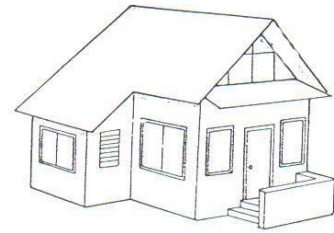


ช่วยให้เราเดินทางไปทุก ๆ แห่งได้อย่างสะดวกปลอดภัย

อุปกรณ์เครื่องตกแต่งภายในบ้านของเราส่วนใหญ่ก็ใช้

ความรู้เกี่ยวกับเส้นขนานช่วยในการตกแต่ง ออกแบบให้สวยงาม

น่าดู น่าอยู่ สร้างความสุขสบายในชีวิตประจำวัน เส้นขนานยังมีประโยชน์ในชีวิตประจำวันอีกมาก
นักเรียนจึงควรมีความรู้เกี่ยวกับสมบัติของเส้นขนาน การนำความรู้เกี่ยวกับเส้นขนานไปใช้แก้ปัญหา
ต่าง ๆ และความรู้เกี่ยวกับเส้นขนาน จะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนรู้ระดับสูงด้วย



เส้นขนาน

1. เส้นขนานและมุมภายใน

บทนิยาม เส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกัน ขนานกันเมื่อเส้นตรงทั้งสองนี้ไม่ตัดกัน

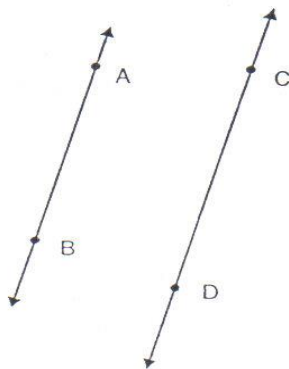
เมื่อ \overleftrightarrow{AB} ขนานกับ \overleftrightarrow{CD} เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$



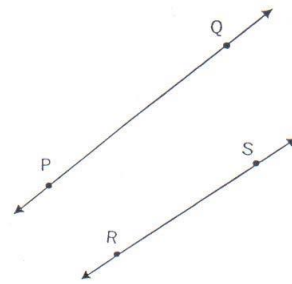
เส้นตรง m ขนานกับเส้นตรง n

ให้นักเรียนพิจารณาว่า เส้นตรงคู่ใดขนานกัน

1)

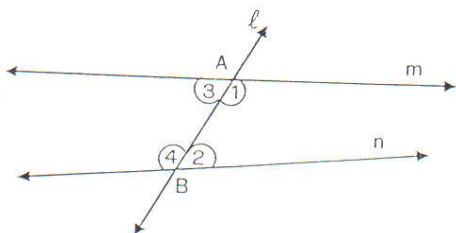


2)



นักเรียนจะเห็นว่า การพิจารณาเส้นตรงคู่ใดขนานกัน โดยใช้บทนิยามนั้นอาจใช้ไม่สะดวก เพราะในหาจุดตัดของเส้นคู่ขนานนั้น นักเรียนอาจต้องเขียนรูปโดยลากเส้นให้ยาวออกไปมาก ๆ จึงเห็นว่าเส้นตรงทั้งสองตัดกัน

ต่อไปนี้เป็นวิธีอีกแบบหนึ่งจะพิจารณาว่าเส้นตรงคู่ใดขนานกัน โดยใช้มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด



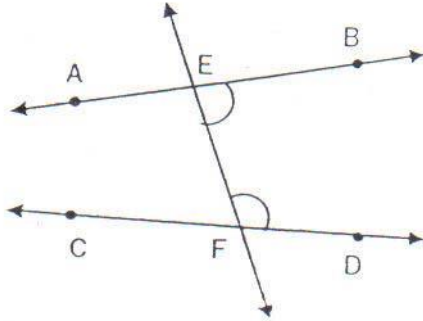
เส้นตรง l ตัดเส้นตรง m และ n ที่จุด A และจุด B เรียกเส้นตรง l หรือ \overleftrightarrow{AB} ว่าเส้นตัด AB

- เรียก 1 และ 2 ว่ามุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

- เรียก 3 และ 4 ว่ามุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

ให้นักเรียนทำกิจกรรมต่อไปนี้

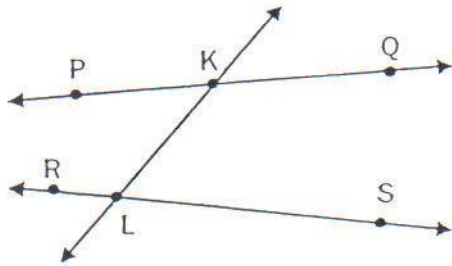
1. ในแต่ละข้อต่อไปนี้ จงบอกว่ามีมุมคู่ใดบ้างเป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด
ตัวอย่าง



มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

EF มีสองคู่ คือ \widehat{BEF} และ \widehat{DFE} , \widehat{AEF} และ \widehat{CFE}

1)



.....

.....

.....

.....

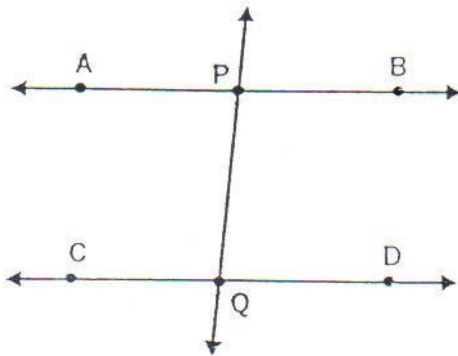
.....

.....

.....

.....

2)



.....

.....

.....

.....

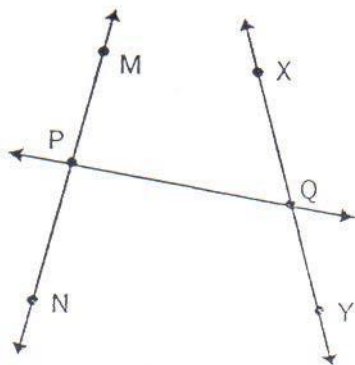
.....

.....

.....

.....

3)



.....

.....

.....

.....

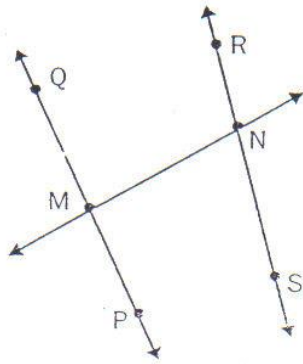
.....

.....

.....

.....

4)



.....

.....

.....

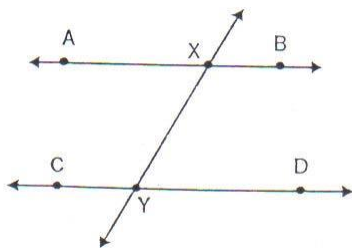
.....

.....

.....

2. กำหนดให้ \overline{AB} และ \overline{CD} ขนานกัน จงหาว่ามุมภายในแต่ละคู่ที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันกี่องศา

1)



.....

.....

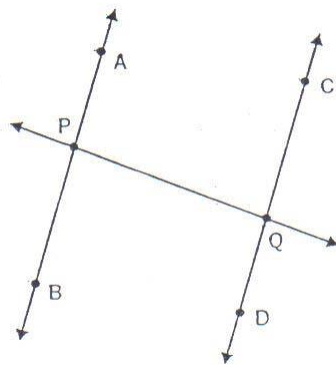
.....

.....

.....

.....

2)



.....

.....

.....

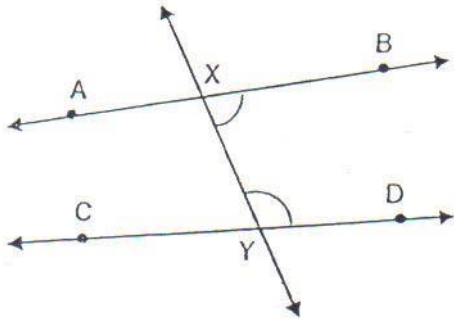
.....

.....

.....

3. ถ้า \vec{AB} และ \vec{CD} ไม่ขนานกัน จงหาว่ามุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันได้ 180 องศา หรือไม่

1)



.....

.....

.....

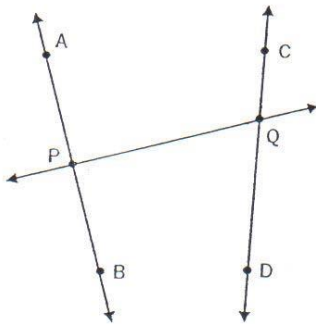
.....

.....

.....

.....

2)



.....

.....

.....

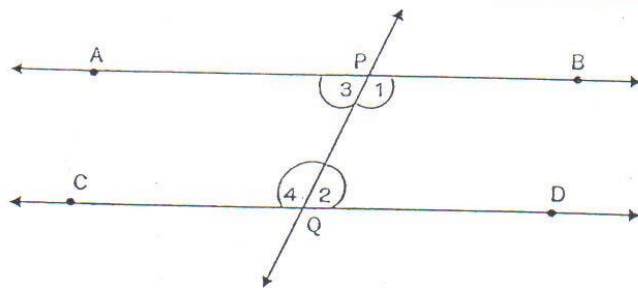
.....

.....

.....

.....

ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัดมาตัดเส้นตรงทั้งสองแล้ว ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเป็น 180 องศา

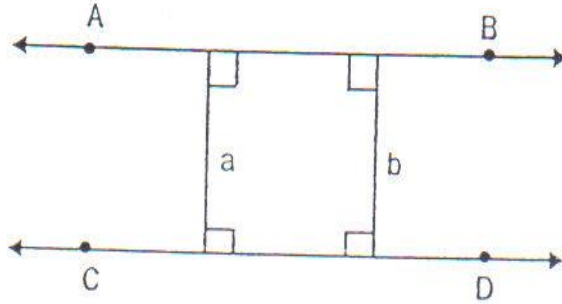


จากรูป \vec{AB} ขนานกับ \vec{CD} และมีเส้นตัด PQ

$$\text{จะได้ } \overset{\wedge}{1} + \overset{\wedge}{2} = 180^\circ$$

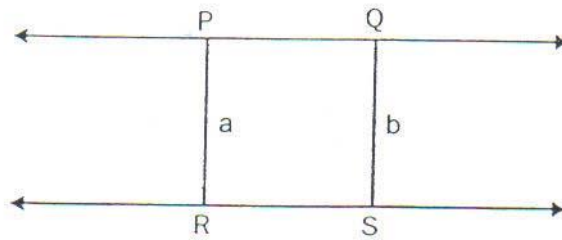
$$\text{และ } \overset{\wedge}{3} + \overset{\wedge}{4} = 180^\circ$$

ถ้า \vec{AB} ขนานกับ \vec{CD} a และ b แทนระยะระหว่างเส้นขนาน ดังรูป



นักเรียนคิดว่า a และ b เท่ากันหรือไม่...

โดยทั่วไป เส้นขนานคู่หนึ่งจะมีระยะระหว่างเส้นขนานเท่ากันเสมอ และในทางกลับกัน เมื่อเส้นตรงสองเส้นมีระยะระหว่างเส้นเท่ากันโดยตลอด เส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน
จากรูป

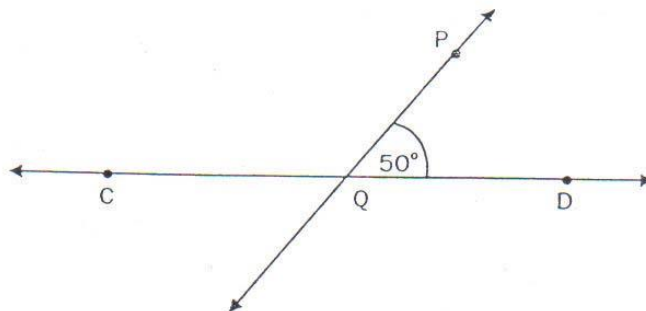


a และ b แทนระยะระหว่างเส้นขนาน

- 1) ถ้า $\vec{PQ} \parallel \vec{RS}$ แล้ว $a = b$
- 2) ถ้า $a = b$ แล้ว $\vec{PQ} \parallel \vec{RS}$

ให้นักเรียนเขียนรูป และตอบคำถามข้อกำหนดต่อไปนี้

- 1) ลาก \vec{AB} ผ่านจุด P ทำมุม 130° กับ \vec{QP} ทางด้านเดียวกับ \vec{QD}



ก. ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันได้เท่าไร

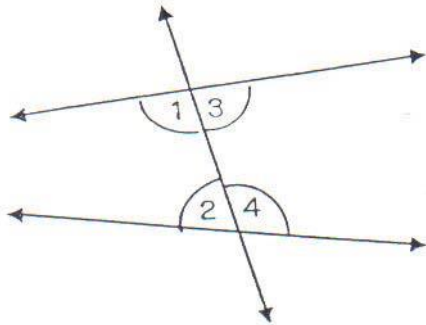
- ข. ระยะระหว่าง \overleftrightarrow{AB} และ \overleftrightarrow{CD} เท่ากันโดยตลอดหรือไม่
- ค. นักเรียนคิดว่า \overleftrightarrow{AB} และ \overleftrightarrow{CD} ขนานกันหรือไม่

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเป็น 180 องศา แล้วเส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน

แบบฝึกพัฒนาการเรียนรู้ ชุดที่ 1

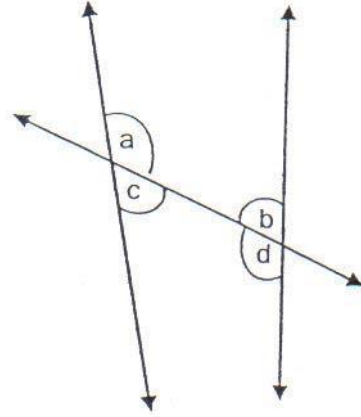
1. ให้นักเรียนบอกว่ามุมคูใดที่เป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

1)



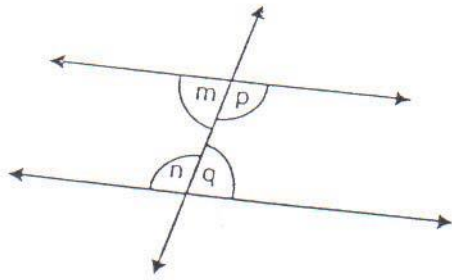
$\hat{1}$ กับ $\hat{2}$ และ

2)



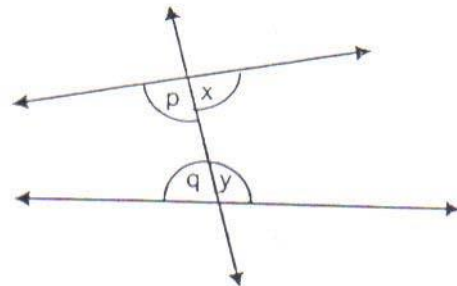
\hat{a} กับ \hat{b} และ

3)



\hat{m} กับ \hat{n} และ

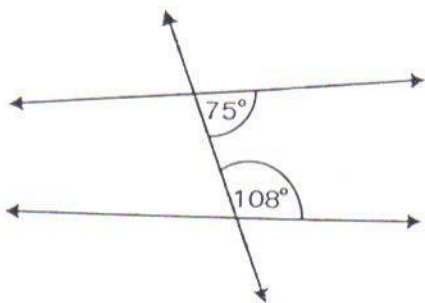
4)



\hat{p} กับ \hat{q} และ

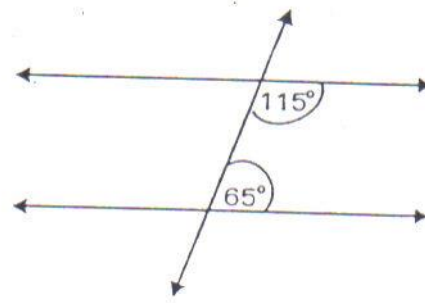
2. ให้นักเรียนพิจารณาว่าเส้นตรงแต่ละคู่ต่อไปนี้ขนานกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

1)



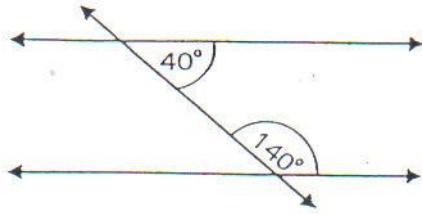
.....

2)

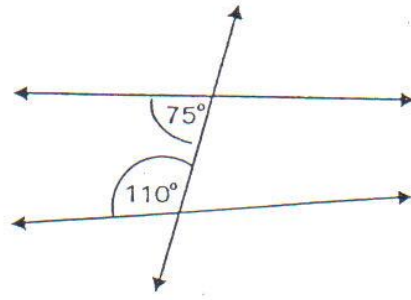


.....

3)

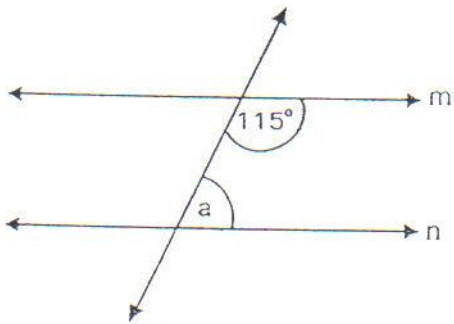


4)



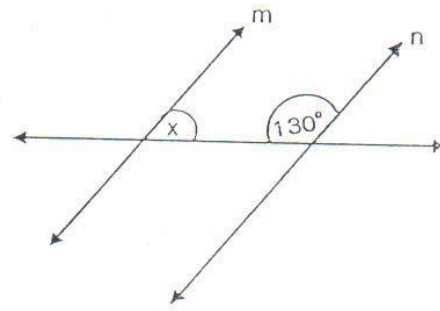
3. กำหนดเส้นตรง m และ n ขนานกันและมีเส้นตัดให้นักเรียนหาค่าของตัวแปรในแต่ละข้อ

1)



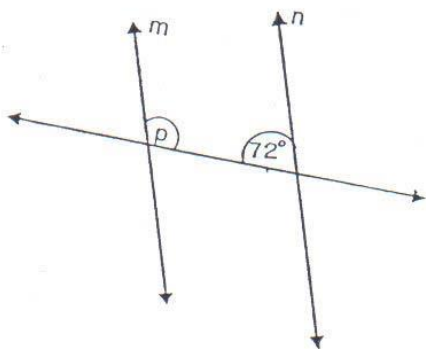
$\hat{a} = \dots\dots\dots$

2)



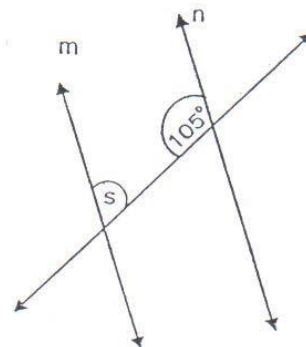
$\hat{x} = \dots\dots\dots$

3)



$\hat{p} = \dots\dots\dots$

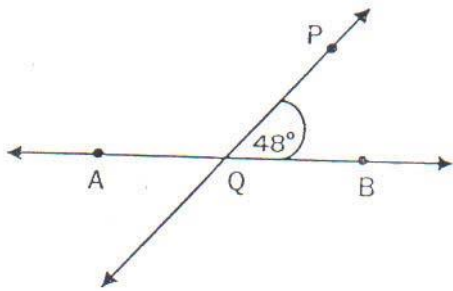
4)



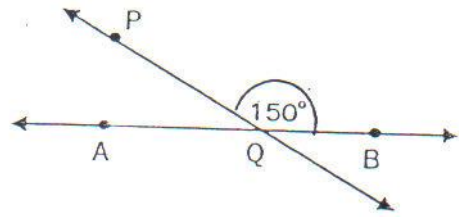
$\hat{s} = \dots\dots\dots$

4. ให้นักเรียนลากเส้น \overleftrightarrow{EF} ผ่านจุด P และขนานกับ \overleftrightarrow{AB} พร้อมทั้งบอกขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันกับ \widehat{PQB}

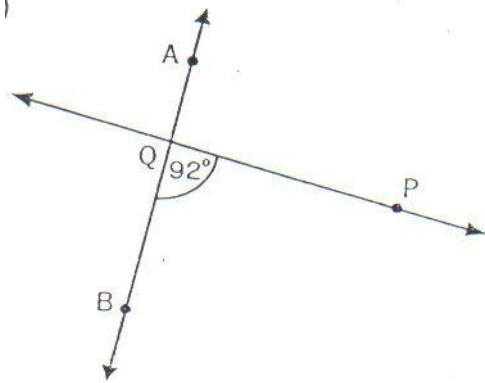
1)



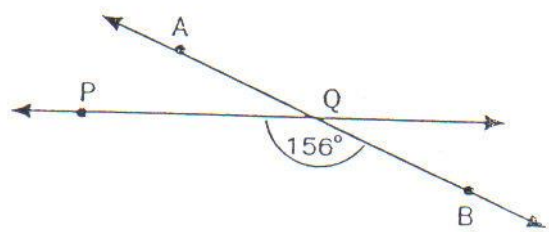
2)



3)



4)

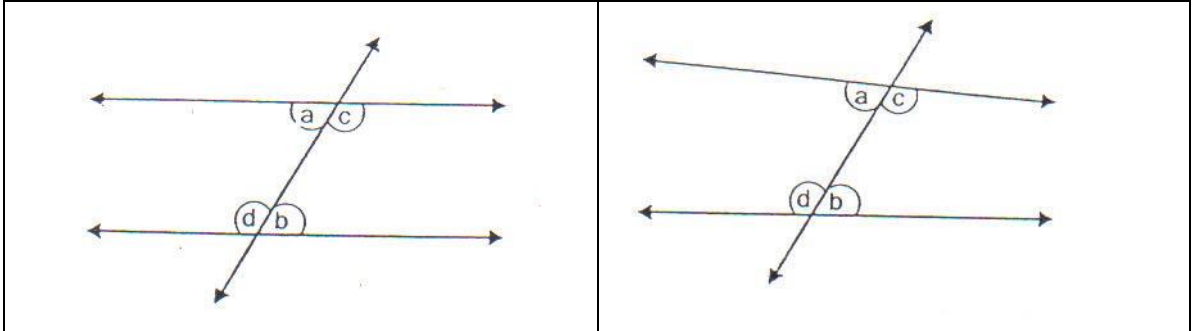


2. เส้นขนานและมุมแย้ง

ให้นักเรียนดูรูป

เส้นตรงที่ขนานกัน

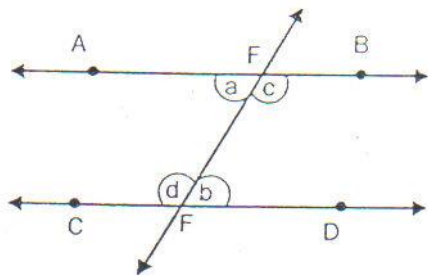
เส้นตรงที่ไม่ขนานกัน



จากรูป เรียกมุม a และมุม b ว่ามุมแย้ง

เรียกมุม c และมุม d ว่ามุมแย้ง

ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัดแล้ว มุมแย้งจะมีขนาดเท่ากัน

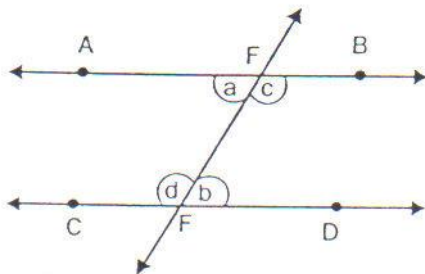


จากรูป \overleftrightarrow{AB} ขนานกับ \overleftrightarrow{CD} และมี \overleftrightarrow{EF} เป็นเส้นตัด ทำให้เกิดมุมแย้ง จะได้ว่า

มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน คือ $\hat{a} = \hat{b}$

และ $\hat{c} = \hat{d}$

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้เกิดมุมแย้งมีขนาดเท่ากันแล้ว เส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน

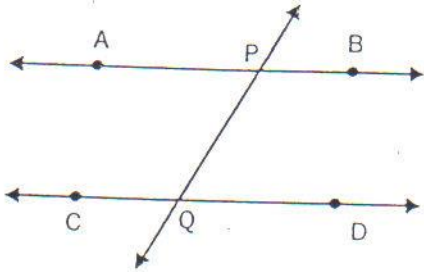


จากรูป \overleftrightarrow{EF} ตัด \overleftrightarrow{AB} และ \overleftrightarrow{CD} ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน คือ $\hat{a} = \hat{b}$ หรือ $\hat{c} = \hat{d}$ แล้วจะได้ว่า เส้นตรง \overleftrightarrow{AB} ขนานกับ \overleftrightarrow{CD}

แบบฝึกพัฒนาการเรียนรู้ ชุดที่ 2

1. ให้นักเรียนพิจารณาว่ามุมคู่ใดที่เป็นมุมแย้ง

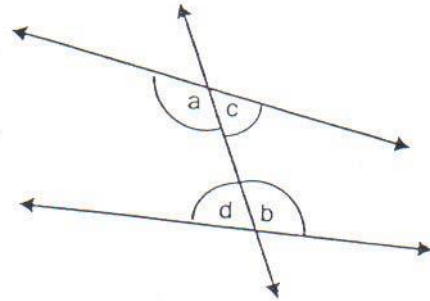
1)



$\hat{A}PQ$ แแย้งกับ

$\hat{B}PQ$ แแย้งกับ

2)

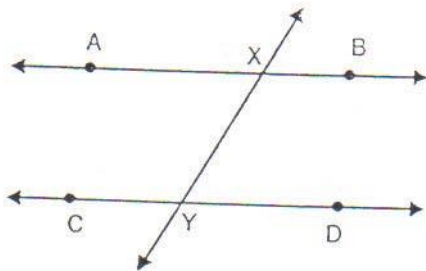


\hat{a} แแย้งกับ

\hat{d} แแย้งกับ

2. ให้นักเรียนพิจารณาว่ามุมแย้งคู่ใดเท่ากัน

1)

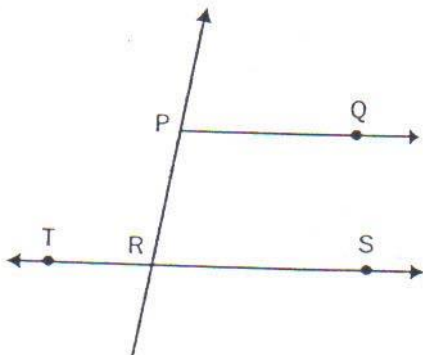


ถ้า \overleftrightarrow{AB} ขนานกับ \overleftrightarrow{CD} และมีเส้นตัด XY แล้ว

มุมแย้ง $\hat{A}XY = \dots\dots\dots$

และ $\hat{B}XY = \dots\dots\dots$

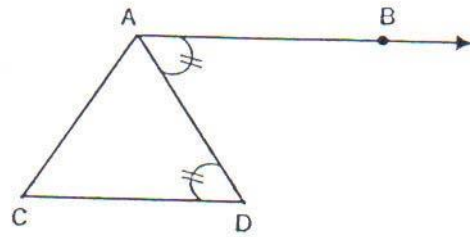
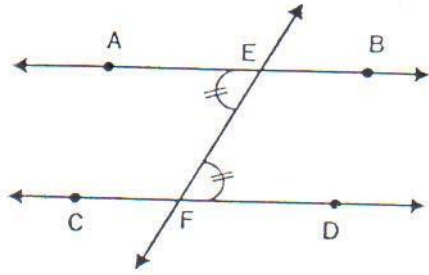
2)



ถ้า \overleftrightarrow{PQ} ขนานกับ \overleftrightarrow{RS} และมีเส้นตัด PR แล้ว

มุมแย้ง $\hat{Q}PR = \dots\dots\dots$

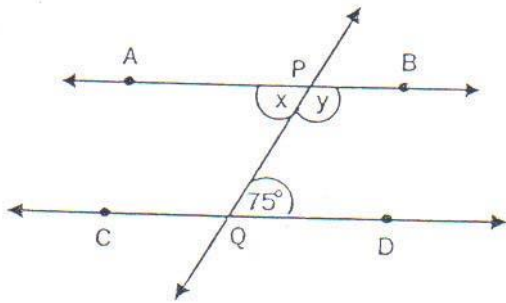
3. จากรูปให้นักเรียนพิจารณาว่า รั้งสี หรือเส้นตรงคู่ใดขนานกันเพราะอะไร



.....

4. ให้นักเรียนหาค่า x และ y ในแต่ละข้อต่อไปนี้ พร้อมทั้งให้เหตุผลประกอบ

1)

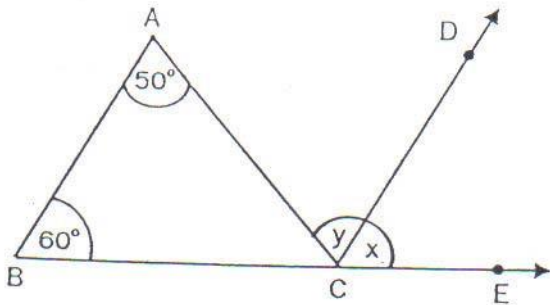


กำหนด $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ และ $\hat{PQD} = 75^{\circ}$

$\hat{x} = \dots\dots\dots$

$\hat{y} = \dots\dots\dots$

2)



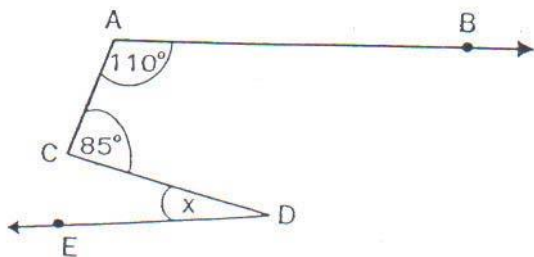
กำหนด $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$

$\hat{BAC} = 50^{\circ}$

$\hat{ABC} = 60^{\circ}$

$\hat{ACE} = \dots\dots\dots$

3)



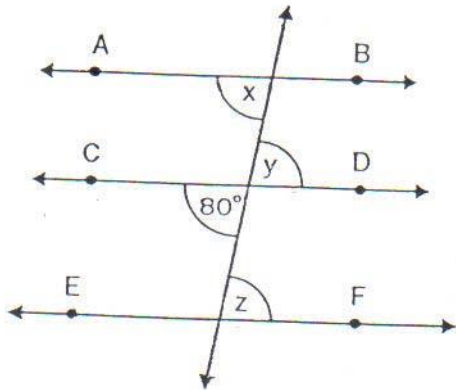
กำหนด $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DE}$

$\hat{BAC} = 110^{\circ}$

$\hat{ACD} = 85^{\circ}$

$\hat{CDE} = \dots\dots\dots$

4)



กำหนด $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{EF}$

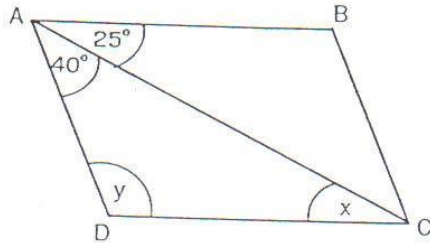
และ $\hat{CYZ} = 80^\circ$

$x = \dots\dots\dots$

$y = \dots\dots\dots$

$z = \dots\dots\dots$

5)



กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้าน

ขนาน มี $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ และ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

$x = \dots\dots\dots$

$y = \dots\dots\dots$

5. ให้นักเรียนหาค่าตัวแปรจากโจทย์ที่กำหนดให้

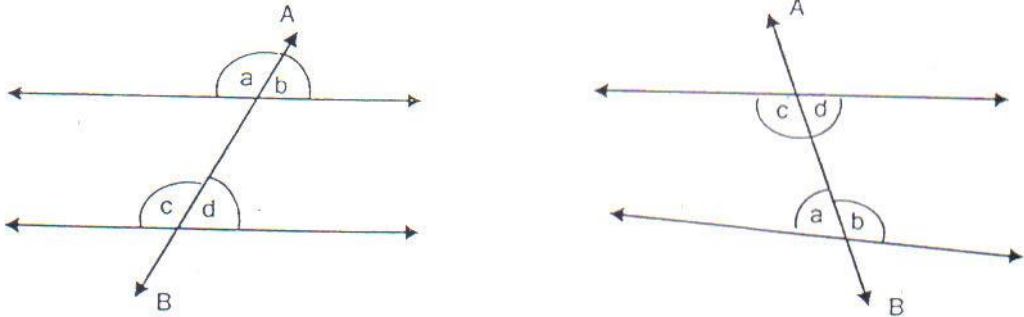
<p>1)</p> <p>$a = \dots\dots\dots$</p>	<p>2)</p> <p>$a = \dots\dots\dots$</p>
---	---

เฉลยแบบฝึกพัฒนาการเรียนรู้ ชุดที่ 2

1. เฉลย
- | | |
|---|---|
| $\begin{array}{c} \hat{} \\ 1) PQD \\ \hat{} \\ PQC \\ \hat{} \end{array}$ | $\begin{array}{c} \hat{} \\ 2) b \\ \hat{} \\ c \\ \hat{} \end{array}$ |
|---|---|
2. เฉลย
- | | |
|--|---|
| $\begin{array}{c} \hat{} \\ 1) XYD \\ \hat{} \\ X Y C \end{array}$ | $\begin{array}{c} \hat{} \\ 2) PRT \\ \hat{} \end{array}$ |
|--|---|
3. เฉลย
- | | |
|--|-----------------------------|
| $1) \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD} \text{ เพราะมีมุมแย้ง}$ | $\hat{A} E F = \hat{E} F D$ |
| $2) \overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD} \text{ เพราะมีมุมแย้ง}$ | $\hat{B} A D = \hat{A} D C$ |
4. เฉลย
- 1) $x = 75^\circ$ (มุมแย้ง)
 - $y = 180^\circ - 75^\circ$ (ผลบวกของมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัด)
 - $= 105^\circ$
 - 2) $y = 50^\circ$ (มุมแย้ง)
 - $x = 180^\circ - y - \hat{A} B C$ (ขนาดของมุมตรง)
 - $= 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ$
 - $= 60^\circ$
 - 3) $x = 15^\circ$ (มุมแย้ง)
 - 4) $x = y$ (มุมแย้ง)
 - $= 80^\circ$ (มุมตรงข้าม)
 - $z = 80^\circ$ (มุมแย้ง)
 - 5) $x = 25^\circ$ (มุมแย้ง)
 - $y = 180^\circ - 25^\circ - 40^\circ$ (ผลบวกของมุมภายในรูปสามเหลี่ยม)
 - $= 115^\circ$
5. เฉลย
- 1) $a = 180^\circ - 72^\circ - 48^\circ$
 - $= 60^\circ$
 - 2) $a = 180^\circ - 160^\circ$
 - $= 20^\circ$

3. เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน

จากรูป



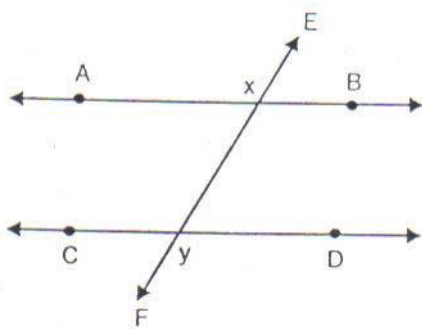
เราเรียก \hat{a} และ \hat{b} ว่ามุมภายนอก

\hat{c} และ \hat{d} ว่ามุมภายใน

\hat{a} และ \hat{c} เป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด AB

\hat{b} และ \hat{d} เป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด AB

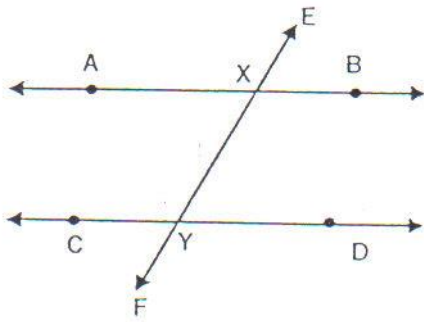
ถ้าเส้นตัดสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัดแล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดจะมีขนาดเท่ากัน



จากรูป $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ และมี \overrightarrow{EF} เป็นเส้นตัด
จะได้ว่า

$$\hat{AXE} = \hat{CYX}, \hat{EXB} = \hat{XYD}$$

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งทำให้มุมภายนอก และมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากันแล้ว เส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน



จากรูปกำหนดให้ \overleftrightarrow{EF} เป็นเส้นตัด \overleftrightarrow{AB} และ

\overleftrightarrow{CD}

ทำให้

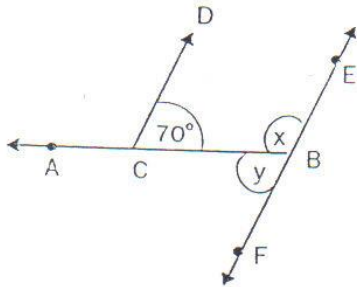
$$\hat{AXE} = \hat{CYX} \quad , \quad \hat{EXB} = \hat{XYD}$$

จะได้ว่า $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

แบบฝึกพัฒนาการเรียนรู้ ชุดที่ 3

1. ให้นักเรียนหาค่าตัวแปรในแต่ละข้อต่อไปนี้

1)

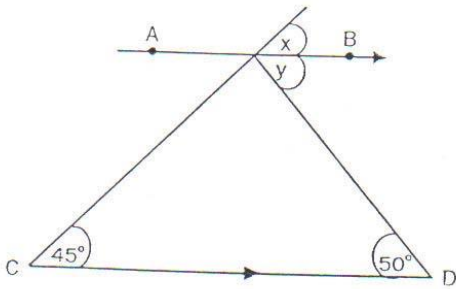


ให้ $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{EF}$ และ $\widehat{DDB} = 70^\circ$

$x = \dots\dots\dots$

$y = \dots\dots\dots$

2)

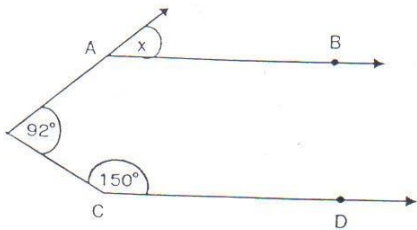


ให้ $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$

$x = \dots\dots\dots$

$y = \dots\dots\dots$

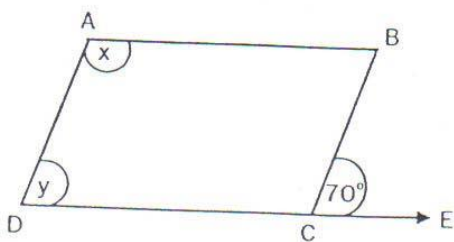
3)



ให้ $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$

$x = \dots\dots\dots$

4)

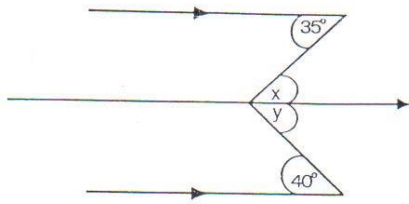


ให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$x = \dots\dots\dots$

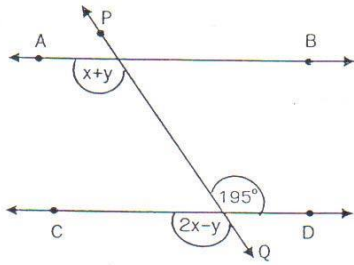
$y = \dots\dots\dots$

5)



$\hat{x} = \dots\dots\dots$
 $\hat{y} = \dots\dots\dots$

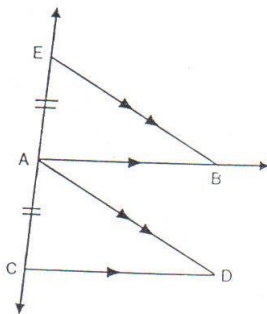
6)



ให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
 $x + y = \dots\dots\dots$
 $2x - y = \dots\dots\dots$
 $x = \dots\dots\dots$
 $y = \dots\dots\dots$

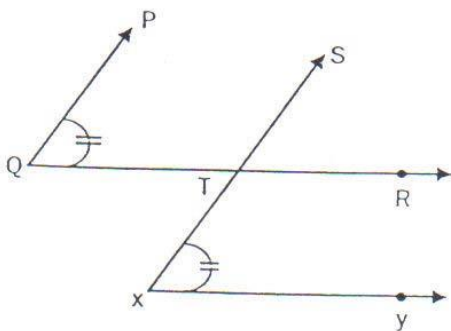
2. ให้นักเรียนเติมเหตุผลในช่องว่างที่กำหนดให้

1)



กำหนดให้ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $\overline{AD} \parallel \overline{EB}$ และ $\overline{AE} \parallel \overline{AC}$
 ต้องการแสดงว่า $\overline{AD} \parallel \overline{EB}$
 (1) $\overline{AE} = \overline{AC}$ เพราะ $\dots\dots\dots$
 $\hat{EAB} = \hat{ACD}$ เพราะ $\dots\dots\dots$
 (3) $\hat{CAD} = \hat{AEB}$ เพราะ $\dots\dots\dots$
 (4) $\triangle ABE \cong \triangle CDA$ เพราะ $\dots\dots\dots$
 (5) $\overline{AD} = \overline{EB}$ เพราะ $\dots\dots\dots$

2)



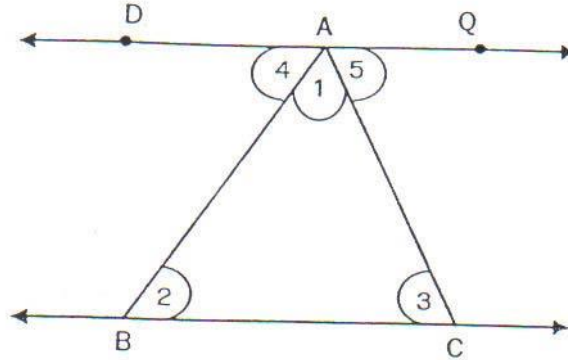
กำหนดให้ $\overline{QR} \parallel \overline{XY}$ และ $\hat{PQT} = \hat{TXY}$
 จงแสดงว่า $\overline{PQ} \parallel \overline{SX}$
 (1) $\overline{QR} \parallel \overline{XY}$ เพราะ $\dots\dots\dots$
 $\hat{PQT} = \hat{TXY}$ เพราะ $\dots\dots\dots$
 (3) $\hat{STR} = \hat{TXY}$ เพราะ $\dots\dots\dots$
 $\hat{PQT} = \hat{STR}$ เพราะ $\dots\dots\dots$
 (5) $\overline{PQ} \parallel \overline{SX}$ เพราะ $\dots\dots\dots$

เฉลยแบบฝึกพัฒนาการเรียนรู้ ชุดที่ 3

1. เฉลย
- 1) $\hat{x} = 110^\circ$, $\hat{y} = 70^\circ$
 - 2) $\hat{x} = 45^\circ$, $\hat{y} = 50^\circ$
 - 3) $\hat{x} = 62^\circ$
 - 4) $\hat{x} = 110^\circ$, $\hat{y} = 70^\circ$
 - 5) $\hat{x} = 35^\circ$, $\hat{y} = 40^\circ$
 - 6) $x + y = 135^\circ$
 $2x - y = 135^\circ$
 $x = 90^\circ$
 $y = 45^\circ$
2. เฉลย
- 1)
 - (1) เพราะ กำหนดให้
 - (2) เพราะ เป็นมุมภายนอกเท่ากับมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด
 - (3) เพราะ เป็นมุมภายนอกเท่ากับมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด
 - (4) เพราะ มุม – ด้าน – มุม
 - (5) เพราะ เป็นสมบัติของความเท่ากันทุกประการ
 - 2)
 - (1) กำหนดให้
 - (2) กำหนดให้
 - (3) มุมภายนอกเท่ากับมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด
 - (4) ต่างเท่ากับ \hat{TXY} (จากข้อ 2, 3 สมบัติการถ่ายทอด)
 - (5) มุมภายนอกและมุมภายในมีขนาดเท่ากัน ทำให้เส้นตรงสองเส้นขนานกัน

4. รูปสามเหลี่ยมและเส้นขนาน

จากรูปสามเหลี่ยม ABC



มี \overline{BC} เป็นฐานลาก $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overline{BC}$ และผ่านจุด A จะได้

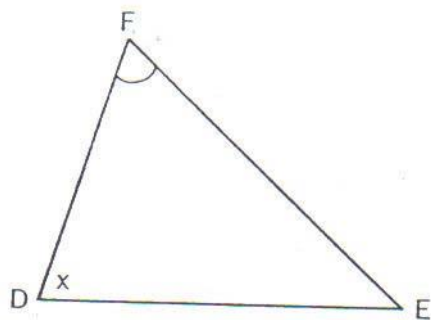
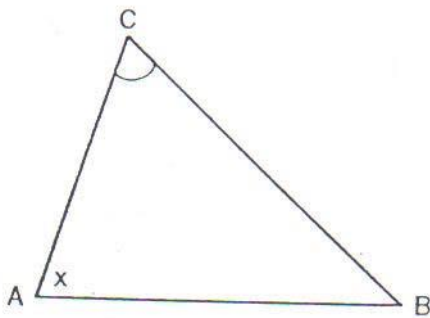
$$\hat{2} = \hat{4} \text{ และ } \hat{3} = \hat{5}$$

แต่ $\hat{1} + \hat{4} + \hat{5} = 180^\circ$ เพราะเป็นมุมตรง

ดังนั้น $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$ แทนค่าด้วยมุมที่เท่ากัน

สรุปได้ว่า

ขนาดของมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ รวมกันได้ 180 องศา



จากรูป $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$

$$\hat{CAB} = \hat{FDE}$$

$$\hat{ACB} = \hat{DFE}$$

และ $\hat{ABC} + \hat{BCA} + \hat{CAB} = 180^\circ$ (สมบัติมุมภายในรูปสามเหลี่ยม)

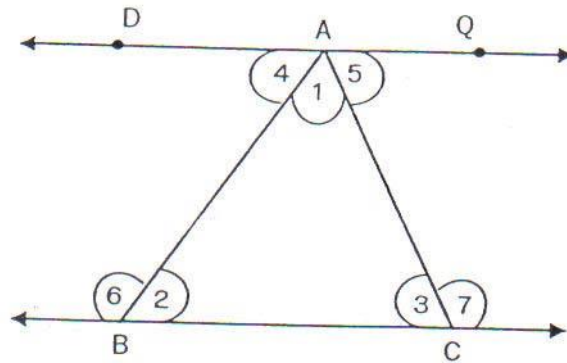
$$\hat{D}EF + \hat{E}FD + \hat{F}DE = 180^\circ \text{ (สมบัติมุมภายในรูปสามเหลี่ยม)}$$

$$\text{ดังนั้น } \hat{A}BC + \hat{B}CA + \hat{C}AB = \hat{D}EF + \hat{E}FD + \hat{F}DE \text{ (ต่างเท่ากับ } 180^\circ)$$

$$\text{แต่ } \hat{C}AB = \hat{F}DE \text{ และ } \hat{A}CB = \hat{D}FE \text{ (กำหนดให้)}$$

$$\text{เพราะฉะนั้น } \hat{A}BC = \hat{D}EF \text{ (สมบัติการตัดออก)}$$

ถ้ามุมของรูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีขนาดเท่ากันสองคู่แล้วมุมคู่ที่สามจะมีขนาดเท่ากันด้วย



กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC มี \overline{BC} เป็นฐาน ลาก $\overleftrightarrow{PQ} \parallel \overline{BC}$ และผ่านจุด A

$$\text{จะได้ } 4 + 6 = 180^\circ \text{ (มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด)}$$

$$1 + 2 + 3 = 180^\circ \text{ (ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม)}$$

$$\text{ดังนั้น } 4 + 6 = 1 + 2 + 3 \text{ (ต่างเท่ากับ } 180)$$

$$\text{แต่ } 4 = 2 \text{ (มุมแย้ง)}$$

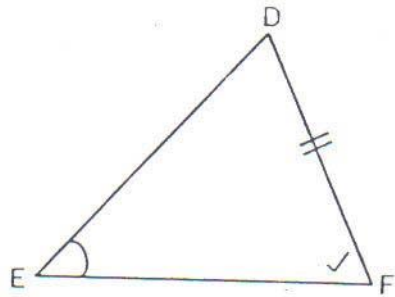
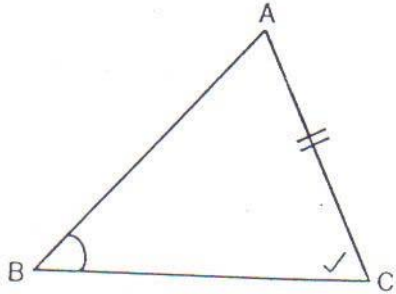
$$\text{เพราะฉะนั้น } 6 = 1 + 3 \text{ (สมบัติการตัดออก)}$$

$$\text{ในทำนองเดียวกัน } 7 = 1 + 2$$

สรุปได้ว่า

ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด

ความสัมพันธ์แบบ มุม – มุม – ด้าน

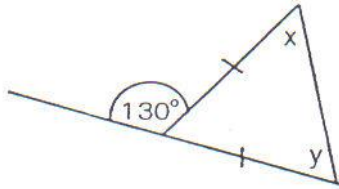


กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF มี $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$ และ $\overline{AC} = \overline{DF}$ จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม DEF ซึ่งเป็นความสัมพันธ์แบบ มุม – มุม – ด้าน (ม.ม.ด)

แบบฝึกพัฒนาการเรียนรู้ ชุดที่ 4

1. จงหาค่า x , y จากรูปที่กำหนดให้

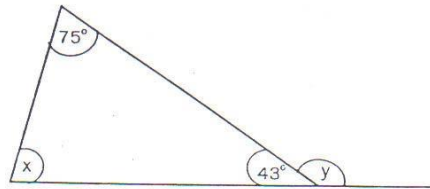
1)



$\hat{x} = \dots\dots\dots$

$\hat{y} = \dots\dots\dots$

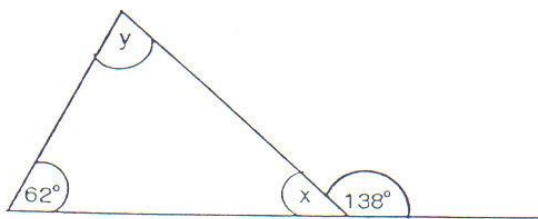
2)



$\hat{x} = \dots\dots\dots$

$\hat{y} = \dots\dots\dots$

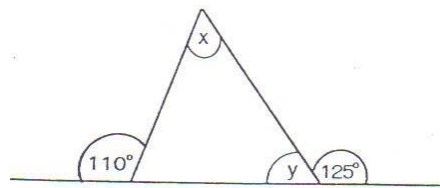
3)



$\hat{x} = \dots\dots\dots$

$\hat{y} = \dots\dots\dots$

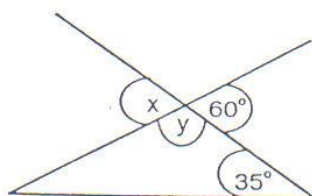
4)



$\hat{x} = \dots\dots\dots$

$\hat{y} = \dots\dots\dots$

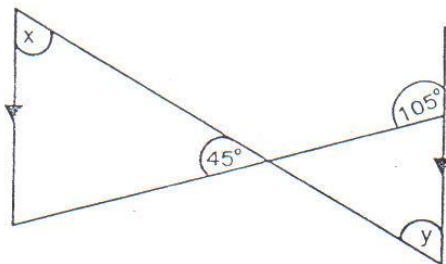
5)



$\hat{x} = \dots\dots\dots$

$\hat{y} = \dots\dots\dots$

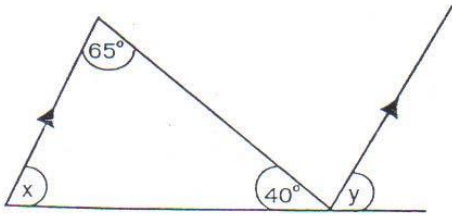
6)



$\hat{x} = \dots\dots\dots$

$\hat{y} = \dots\dots\dots$

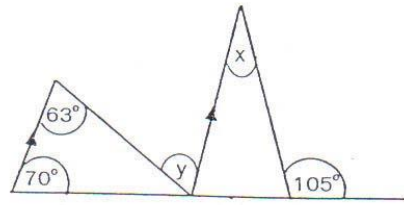
7)



$\hat{x} = \dots\dots\dots$

$\hat{y} = \dots\dots\dots$

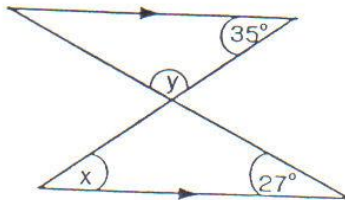
8)



$\hat{x} = \dots\dots\dots$

$\hat{y} = \dots\dots\dots$

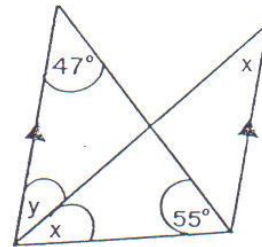
9)



$\hat{x} = \dots\dots\dots$

$\hat{y} = \dots\dots\dots$

10)



$\hat{x} = \dots\dots\dots$

$\hat{y} = \dots\dots\dots$

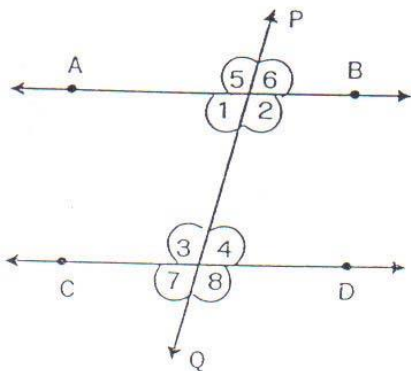
เฉลยแบบฝึกพัฒนาการเรียนรู้ ชุดที่ 4

- | | | | |
|---------|--|----------|--|
| 1. เฉลย | $\hat{x} = 65^\circ$, $\hat{y} = 65^\circ$ | 2. เฉลย | $\hat{x} = 62^\circ$, $\hat{y} = 137^\circ$ |
| 3. เฉลย | $\hat{x} = 42^\circ$, $\hat{y} = 76^\circ$ | 4. เฉลย | $\hat{x} = 55^\circ$, $\hat{y} = 55^\circ$ |
| 5. เฉลย | $\hat{x} = 60^\circ$, $\hat{y} = 120^\circ$ | 6. เฉลย | $\hat{x} = 60^\circ$, $\hat{y} = 60^\circ$ |
| 7. เฉลย | $\hat{x} = 75^\circ$, $\hat{y} = 75^\circ$ | 8. เฉลย | $\hat{x} = 35^\circ$, $\hat{y} = 63^\circ$ |
| 9. เฉลย | $\hat{x} = 35^\circ$, $\hat{y} = 118^\circ$ | 10. เฉลย | $\hat{x} = 39^\circ$, $\hat{y} = 39^\circ$ |

แบบทดสอบหลังเรียน

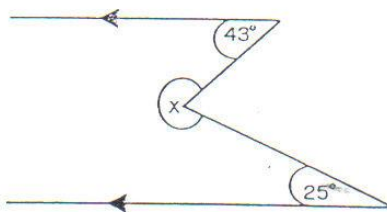
คำสั่ง จงเลือกข้อที่ถูกที่สุดเพียงข้อเดียว

1. เส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกัน จะขนานกันก็ต่อเมื่อ
 1. เส้นตรงทั้งสองเส้นไม่ตัดกัน
 2. เส้นตรงทั้งสองเส้นยาวเท่ากัน
 3. เส้นตรงทั้งสองเส้นไม่ตั้งฉากกัน
 4. มีข้อถูกมากกว่า 1 ข้อ
2. จากรูปที่กำหนดให้ $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ ผลบวกของขนาดของมุมในข้อใดรวมกันเท่ากับ 180 องศา



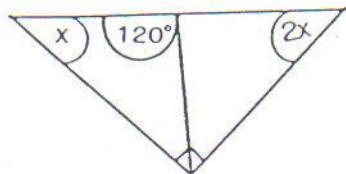
- | | |
|------------|------------|
| 1. 5 กับ 8 | 2. 4 กับ 6 |
| 3. 3 กับ 2 | 4. 2 กับ 7 |

3. จากรูปมุม x มีขนาดกี่องศา



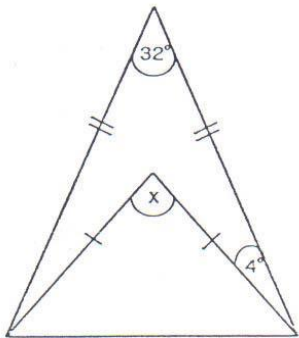
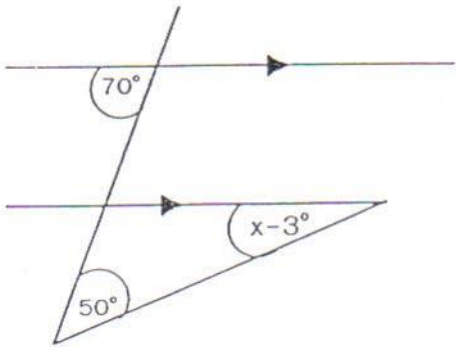
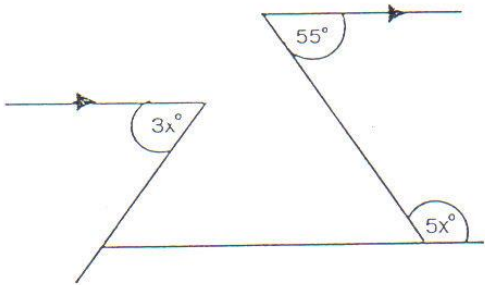
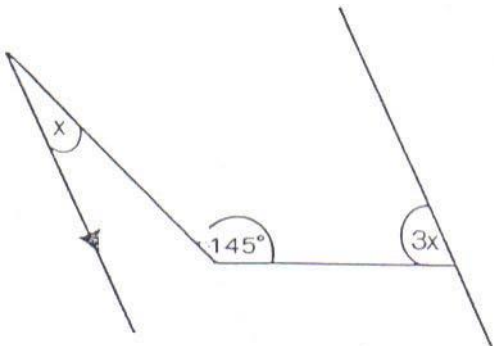
- | | |
|----------------|----------------|
| 1. 68° | 2. 108° |
| 3. 112° | 4. 137° |

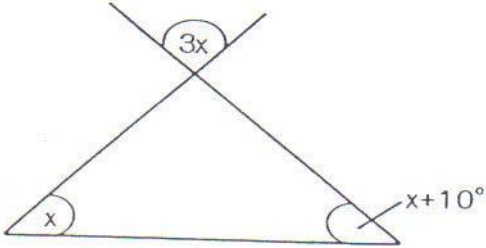
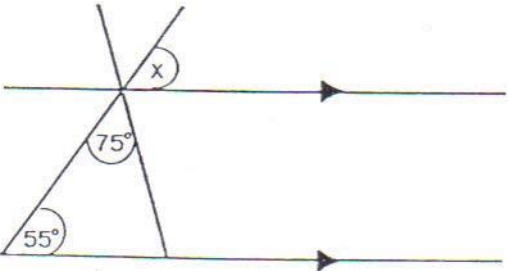
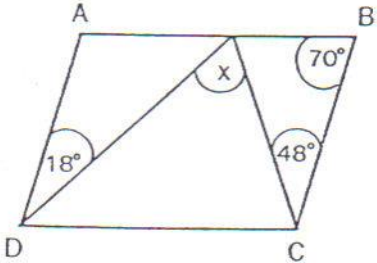
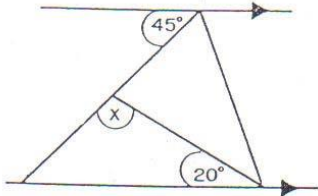
4.



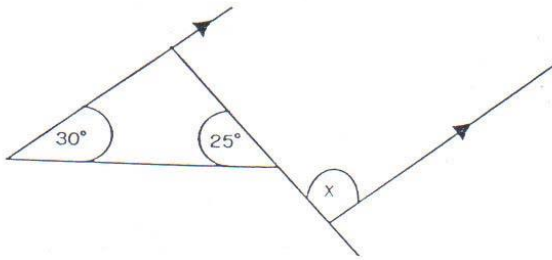
จากรูป x มีขนาดกี่องศา

1. 15°
2. 30°
3. 35°
4. 45°

<p>5.</p> 	<p>จากรูป \hat{x} มีขนาดกี่องศา</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 30° 2. 40° 3. 45° 4. 58°
<p>6.</p> 	<p>จากรูป \hat{x} มีขนาดกี่องศา</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 17° 2. 20° 3. 23° 4. 25°
<p>7.</p> 	<p>จากรูปที่กำหนดให้มุม $3x$ มีขนาดกี่องศา</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 25° 2. 35° 3. 65° 4. 75°
<p>8.</p> 	<p>จากรูป \hat{x} มีขนาดกี่องศา</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 17.5° 2. 11.5° 3. 8.5° 4. 5°

<p>9.</p> 	<p>จากรูป \hat{x} มีขนาดกี่องศา</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 34° 2. 35° 3. 82° 4. 102°
<p>10.</p> 	<p>จากรูปที่กำหนดให้ \hat{x} มีขนาดกี่องศา</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 50° 2. 55° 3. 65° 4. 75°
<p>11.</p> 	<p>กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยม ด้านขนาน \hat{x} มีขนาดกี่องศา</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 55° 2. 66° 3. 76° 4. 86°
<p>12.</p> 	<p>จากรูป \hat{x} มีขนาดกี่องศา</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 100° 2. 108° 3. 110° 4. 115°

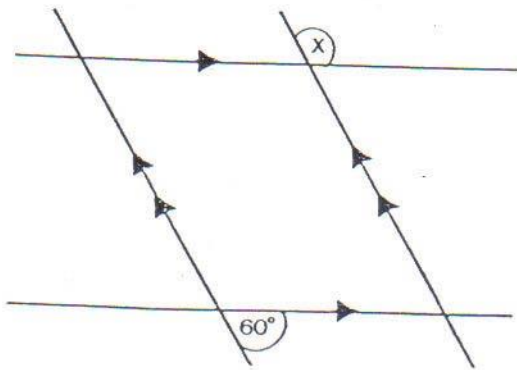
13.



จากรูปที่กำหนดให้ \hat{x} มีขนาดกี่องศา

1. 55°
2. 105°
3. 125°
4. 135°

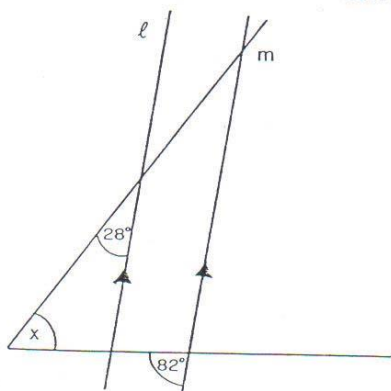
14.



จากรูปที่กำหนดให้ \hat{x} มีขนาดกี่องศา

1. 120°
2. 110°
3. 105°
4. 100°

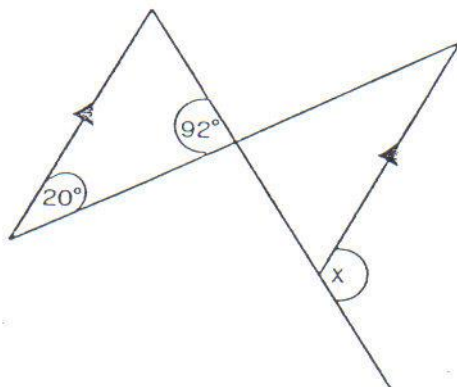
15.



จากรูปที่กำหนดให้ เส้น $l \parallel m$ \hat{x} มีขนาดกี่องศา

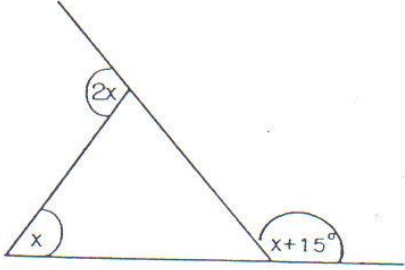
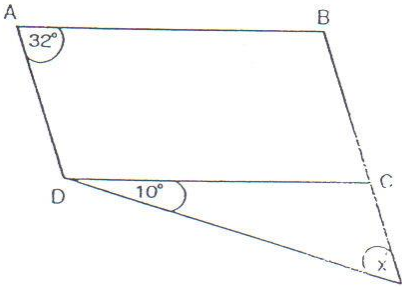
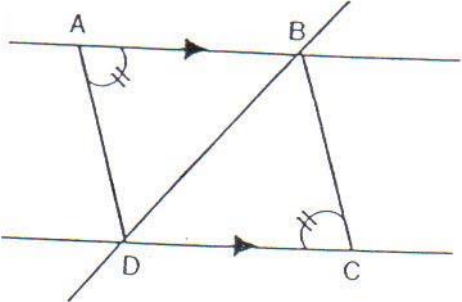
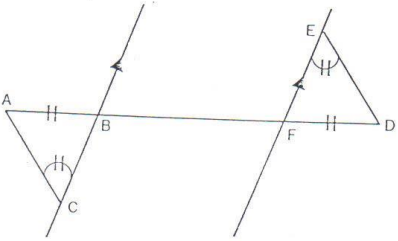
1. 39°
2. 54°
3. 70°
4. 82°

16.



จากรูป \hat{x} มีขนาดกี่องศา

1. 92°
2. 100°
3. 112°
4. 120°

<p>17.</p> 	<p>จากรูป \hat{x} มีขนาดกี่องศา</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 75° 2. 76.5° 3. 82.5° 4. 85°
<p>18.</p> 	<p>กำหนดให้ $\square ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยม ด้านขนาน \hat{x} มีขนาดกี่องศา</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. 11° 2. 15° 3. 22° 4. 32°
<p>19.</p> 	<p>จากรูป $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ $\triangle ABD$ เท่ากันทุก ประการกับ $\triangle BCD$ ด้วยเหตุผลใด</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. ม.ด.ม 2. ม.ม.ด. 3. ค.ด.ด. 4. ม.ม.ม.
<p>20.</p> 	<p>จากรูปที่กำหนดให้ $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ด้วยเหตุผลใด</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. ค.ด.ด. 2. ม.ด.ม. 3. ม.ม.ด. 4. ม.ม.ม.

เฉลยแบบทดสอบ (หลังเรียน) เพื่อประเมินผลการเรียนรู้
เรื่องเส้นขนาน

- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1. (1) | 2. (4) | 3. (3) | 4. (2) | 5. (2) |
| 6. (3) | 7. (4) | 8. (1) | 9. (1) | 10. (2) |
| 11. (2) | 12. (4) | 13. (3) | 14. (1) | 15. (2) |
| 16. (3) | 17. (3) | 18. (3) | 19. (2) | 20. (3) |