หน่วยการเรียนรู้ที่ 9

เส้นขนาน

มาตรฐานการเรียนรู้

มาตรฐาน ค 3.2 : ข้อ 1

มาตรฐาน ค 6.1 : ข้อ 1 และ ข้อ 2

มาตรฐาน ค 6.2 : ข้อ 1

มาตรฐาน ค 6.3 : ข้อ 1

มาตรฐาน ค 6.4 : ข้อ 1 และ ข้อ 2

มาตรฐาน ค 6.5 : ข้อ 1

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. บอกสมบัติของเส้นขนานและเงื่อนไขที่ทำให้เส้นตรงสองเส้นขนานกันได้
2. ระบุได้ว่ารูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ์กันแบบ มุม – มุม – ด้าน เท่ากันทุกประการ
3. ใช้สมบัติเกี่ยวกับความเท่ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมและเส้นขนานในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้

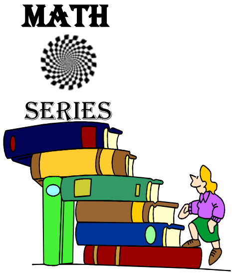
สาระการเรียนรู้

9.1 เส้นขนานและมุมภายใน (4 คาบ)

9.2 เส้นขนานและมุมแย้ง (4 คาบ)

9.3 เส้นขนานและมุมภายนอกกับภายใน (4 คาบ)

9.4 เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม (5 คาบ)



9.1 เส้นขนานและมุมภายใน

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ : นักเรียนสามารถ

1. บอกได้ว่า ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน แล้วระยะห่างระหว่างเส้นตรงคู่นั้นจะเท่ากันเสมอ
2. บอกได้ว่า ถ้าเส้นตรงสองเส้นมีระยะห่างระหว่างเส้นตรงเท่ากันเสมอ แล้วเส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน
3. บอกได้ว่า มุมคู่ใดเป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด เมื่อกำหนดให้เส้น ตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง
4. บอกได้ว่า เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ ขนาดของมุมภายในที่อยู่ บนข้างเดียวกันของเส้ นตัด รวมกันเท่ากับ 180 องศา และนำสมบัตินี้ไปใช้ได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ : นักเรียนมีความสามารถใน

1. การคิดคำนวณ
2. การแก้ปัญหา
3. การให้เหตุผล
4. การสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอ
5. การเชื่อมโยง
6. ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ : ปลูกฝังให้นักเรียน

1. มีความรับผิดชอบ
2. มีความสนใจใฝ่รู้
3. มีความรอบคอบ มีระเบียบวินัย
4. มีความเชื่อมั่นในตนเอง
5. มีวิจารณญาณและทำงานอย่างเป็นระบบ
6. ตระหนักในคุณค่า และมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

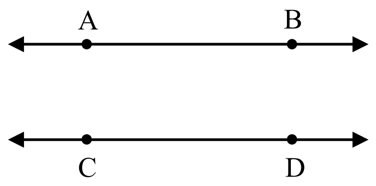
เส้นขนานและมุมภายใน

ให้นักเรียนยกตัวอย่างของสิ่งที่มีลักษณะของเส้นขนานมา 3 สิ่ง

....

การขนานกันของเส้นตรงมีบทนิยามดังนี้

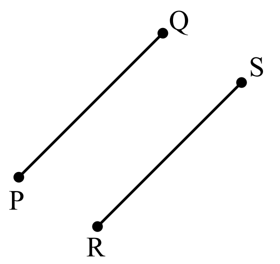
บทนิยาม	เส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกัน ขนานกัน ก็ต่อเมื่อ เส้นตรงทั้งสองเส้นนั้นไม่ตัดกัน



เมื่อ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ขนานกัน อาจกล่าวว่า $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกัน $\overleftrightarrow{CD}$ หรือ $\overleftrightarrow{CD}$ ขนานกัน $\overleftrightarrow{AB}$ อาจเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ หรือ $\overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{AB}$

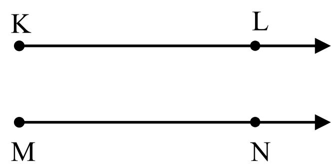
เราสามารถกล่าวว่าส่วนของเส้นตรงหรือรังสีขนานกันเมื่อส่วนของเส้นตรงหรือรังสีนั้นเป็นส่วนหนึ่งของเสนตรงที่ขนานกัน เช่น

1.



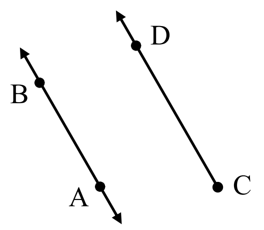
$\overline{PQ} // \overline{RS}$

2.



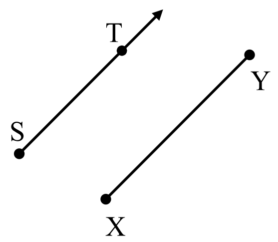
…………………

3.



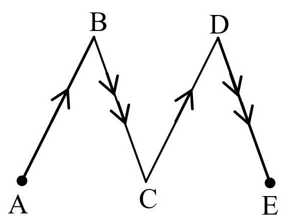
…………………

4.



…………………

ในการเขียนรูปเส้นตรง ส่วนของเส้นตรง หรือรังสีที่ขนานกัน อาจใช้ลูกศรแสดงเส้นที่ขนานกัน ดังตัวอย่างในรูป

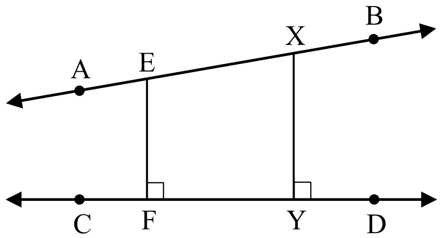


แสดงว่า $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

และ …………………

ระยะห่างระหว่างเส้นขนาน

พิจารณารูปต่อไปนี้



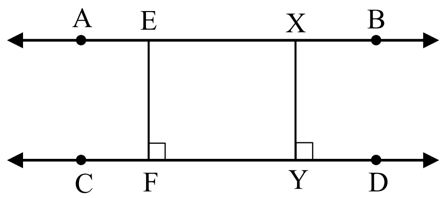
กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ อยู่บนระนาบเดียวกัน E และ X เป็นจุดที่แตกต่างกันบน $\overleftrightarrow{AB}$ ลาก $\overline{EF}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด F และลาก $\overline{XY}$ ตั้งฉากกับ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด Y

เรียก EF ว่า **ระยะห่างระหว่าง** $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่วัดจากจุด E

และ เรียก XY ว่า **ระยะห่างระหว่าง** $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่วัดจากจุด X

ในกรณีที่ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ไม่ขนานกัน จะได้ว่า $EF \neq XY$ นั่นคือระยะห่างระหว่าง $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่วัดจากจุดที่แตกต่างกันบน $\overleftrightarrow{AB}$ จะไม่เท่ากัน

ในกรณีที่ $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกัน $\overleftrightarrow{CD}$ จะได้ว่า $EF = XY$ นั่นคือระยะห่างระหว่าง $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่วัดจากจุดที่แตกต่างกันบน $\overleftrightarrow{AB}$ จะเท่ากันเสมอ



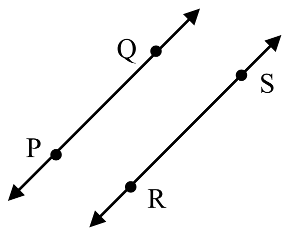
ในกรณีทั่วไป **ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน แล้วระยะห่างระหว่างเส้นตรงคู่นั้นจะเท่ากันเสมอ** และในทางกลับกัน **ถ้าเส้นตรงสองเส้นมีระยะห่างระหว่างเส้นตรงเท่ากันเสมอ แล้วเส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน**

ในทางปฏิบัติ เมื่อต้องการตรวจสอบว่า เส้นตรงสองเส้นที่กำหนดให้ขนานกันหรือไม่ อาจตรวจสอบระยะห่างระหว่างเส้นตรงทั้งสองที่วัดจาดจุดที่แตกต่างกันอย่างน้อยสองจุดบนเส้นตรงหนึ่งก็เพียงพอ

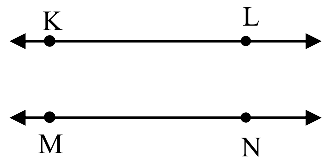
สำรวจ ตรวจสอบ เส้นขนาน

จากรูปที่กำหนด ให้นักเรียนพิจารณาว่าเส้นตรงคู่ใดบ้างที่ขนานกัน

1.

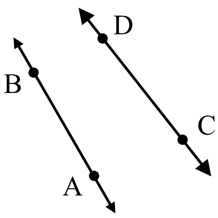


2.

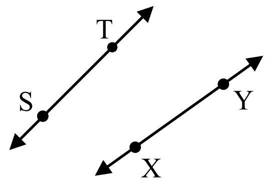


....

3.

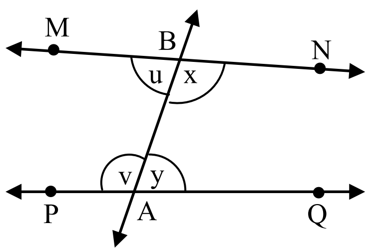


4.



....

มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด



จากรูป $\overleftrightarrow{AB}$ เรียกว่า **เส้นตัด AB**

เรียก $\hat{x}$ และ $\hat{y}$ ว่า **มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด** AB และ

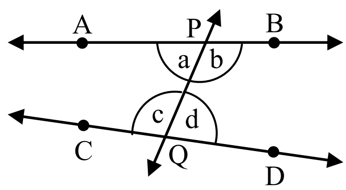
เรียก $\hat{u}$ และ $\hat{v}$ ว่า **มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด** AB ด้วย

ในการเขียนรูปเส้นตัด AB อาจใช้ $\overline{AB}$ หรือ $\overrightarrow{AB}$ แทน $\overleftrightarrow{AB}$ ก็ได้

สำรวจ ตรวจสอบ มุมภายใน

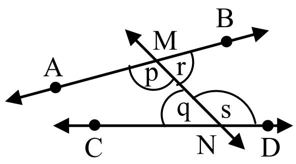
ในแต่ละข้อต่อไปนี้ ให้นักเรียนบอกมุมคู่ที่เป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

1.



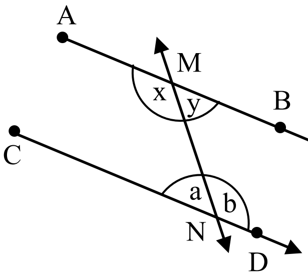
$\hat{a}$ กับ $\hat{c}$ และ…………………

2.



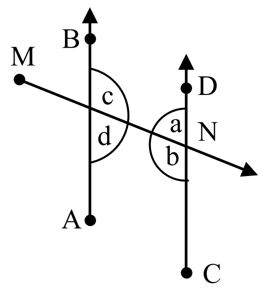
$\hat{p}$ กับ $\hat{q}$ และ…………………

3.



……………………………………….

4.

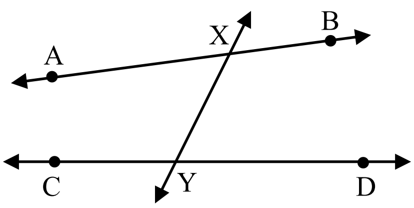


……………………………………….

สำรวจ ตรวจสอบ เส้นขนานและมุมภายใน

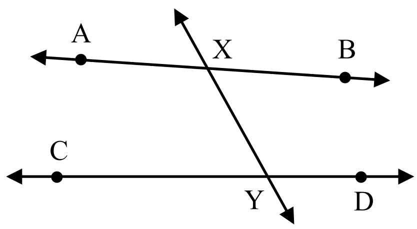
1. ในแต่ละข้อกำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ไม่ขนานกัน มี $\overleftrightarrow{XY}$ เป็นเส้นตัด จงสำรวจว่าขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด รวมกันเท่ากับ 180 องศา หรือไม่

1)



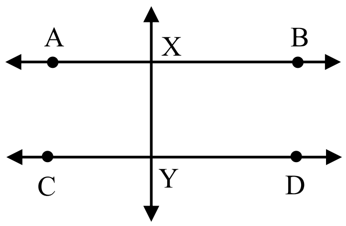
……………………………………..

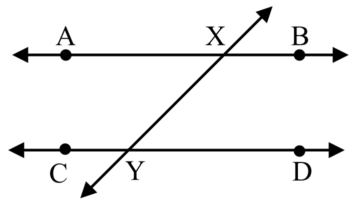
2)



……………………………………..

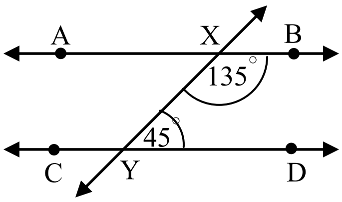
2. ในแต่ละข้อกำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ขนานกัน มี $\overleftrightarrow{XY}$ เป็นเส้นตัด จงสำรวจว่าขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด รวมกันเท่ากับ 180 องศา หรือไม่

1) 

2) 

……………………………………..   ……………………………………..

3. กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{XY}$ เป็นเส้นตัด และมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา จงสำรวจว่า $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ขนานกันหรือไม่

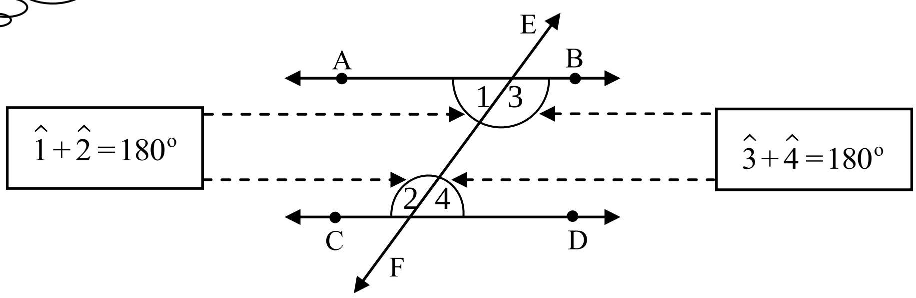


………………………………

จากคำตอบที่ได้จากข้อ 1, 2 และข้อ 3 ได้ผลสรุปที่เป็นไปตามสมบัติของเส้นขนานดังนี้

เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อ ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา

นำไปใช้

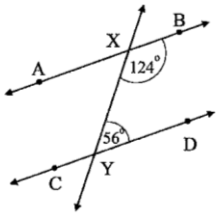


$\overleftrightarrow{AB}$ **จะขนานกับ** $\overleftrightarrow{CD}$ ก็ต่อเมื่อ

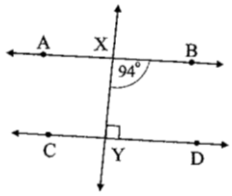
1. $\hat{1}+\hat{2}=180^{o}$ หรือ
2. $\hat{3}+\hat{4}=180^{o}$

ตัวอย่างที่ 1 $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ในแต่ละข้อขนานกันหรือไม่ เพราะเหตุใด

1)



2)



วิธีทำ 1) $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

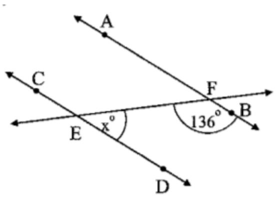
เพราะว่า ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ $124 + 56 = 180$ องศา

2) $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ไม่ขนานกัน

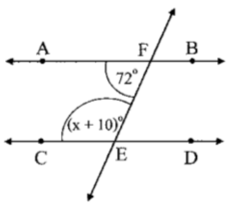
เพราะว่า ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ $94 + 90 = 184$ องศา ซึ่งไม่เท่ากับ 180 องศา

ตัวอย่างที่ 2 กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ จงหาค่า x ในแต่ละข้อ

1)



2)



วิธีทำ 1) เนื่องจาก $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ จะได้ $x + 136 = 180$

(ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา)

นั่นคือ $x =$ ……………

ดังนั้น $x =$ ……………

2) เนื่องจาก $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ จะได้ $x + 10 + 72 = 180$

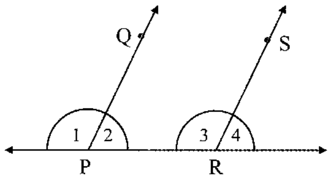
(ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา)

นั่นคือ $x + 82 = 180$

$x =$ ……………

ดังนั้น $x =$ ……………

ตัวอย่างที่ 3 จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{RS}$ จงพิสูจน์ว่า $\hat{1} = \hat{3}$



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{RS}$ มี $\overleftrightarrow{PR}$ เป็นเส้นตัด

ต้องการพิสูจน์ว่า $\hat{1} = \hat{3}$

พิสูจน์ $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{RS}$ มี $\overleftrightarrow{PR}$ เป็นเส้นตัด (กำหนดให้)

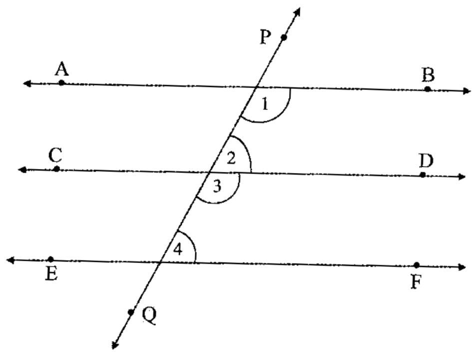
$\hat{2} + \hat{3} =$ .... (…………………………………………………
…………………………………………………)

$\hat{2} + \hat{1} =$ .... (ขนาดของมุมตรงข้าม)

จะได้ $\hat{2} + \hat{1} = \hat{2} + \hat{3}$ (สมบัติการเท่ากัน)

ดังนั้น .... (นำ $\hat{2}$ มาลบทั้งสองข้างของสมการ)

ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ และ $\overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{EF}$ ดังรูป จงพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{EF}$



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ และ $\overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{EF}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{EF}$

พิสูจน์ ลาก $\overleftrightarrow{PQ}$ ให้ตัด $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ และ $\overleftrightarrow{EF}$ ดังรูป

$\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ และมี $\overleftrightarrow{PQ}$ เป็นเส้นตัด (กำหนดให้)

$\hat{1} + \hat{2} =$ .... (ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา)

$\overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{EF}$ และมี $\overleftrightarrow{PQ}$ เป็นเส้นตัด (กำหนดให้)

$\hat{3} + \hat{4} =$ .... (ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180 องศา)

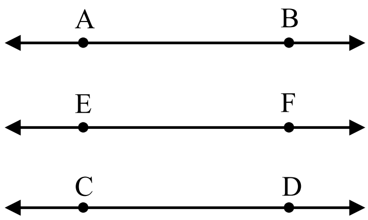
$\hat{1}+\hat{2}+\hat{3}+\hat{4}=180^\circ+180^\circ$ (สมบัติของการเท่ากัน)

แต่ $\hat{2}+\hat{3}=$........... (……………………………………)

จะได้ $\hat{1}+\hat{4}=180^\circ$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{EF}$ (ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด รวมกันเท่ากับ 180 องศา แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

ในทำนองเดียวกัน ถ้ากำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$ และ $\overleftrightarrow{CD} \,//\, \overleftrightarrow{EF}$ ดังรูป จะสามารถพิสูจน์ได้ว่า $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{EF}$

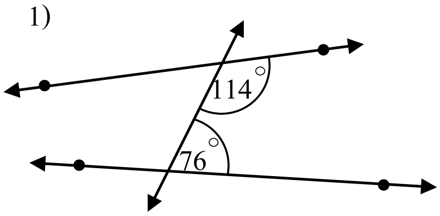


จากตัวอย่างที่ 4 ถ้า $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$ และ $\overleftrightarrow{CD} \,//\, \overleftrightarrow{EF}$ แล้ว $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{EF}$ กล่าวว่า **การขนานกันของเส้นตรงมีสมบัติถ่ายทอด**

กิจกรรมที่ 9.1 : ทักษะการให้เหตุผล การสื่อสาร สื่อความหมาย และการนำเสนอ

1. ให้นักเรียนพิจารณาว่าเส้นตรงแต่ละคู่ต่อไปนี้ขนานกันหรือไม่ขนานกัน เพราะเหตุใด

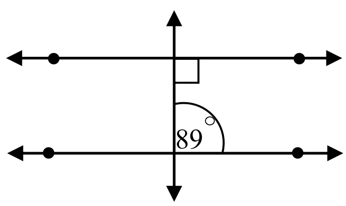
1)



ไม่ขนานกัน เพราะว่า

$76^\circ + 114^\circ \neq 180^\circ$

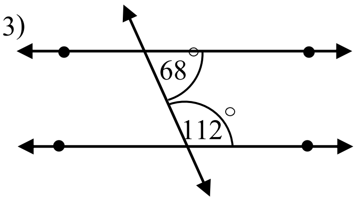
2)



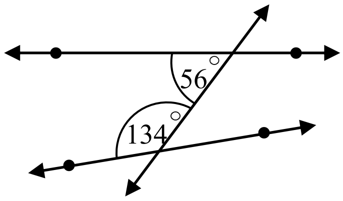
…………………………………………

…………………………………………

3)



4)



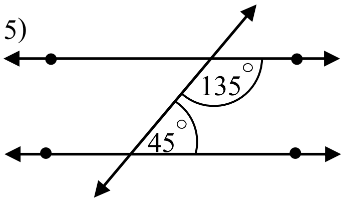
....

....

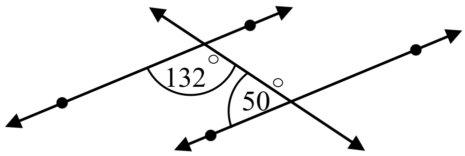
....

....

5)



6)



....

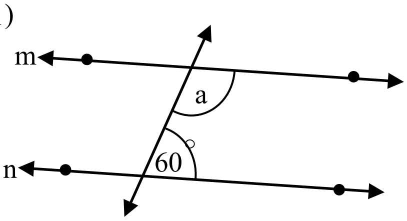
....

....

....

2. กำหนดเส้นตรง m และ n ขนานกันและมีเส้นตัด ให้นักเรียนหาค่าของตัวแปรในแต่ละข้อต่อไปนี้

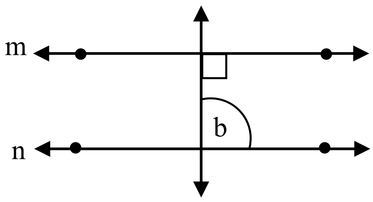
1)



$a = 180^{\circ} - 60^{\circ}$

$= 120^{\circ}$

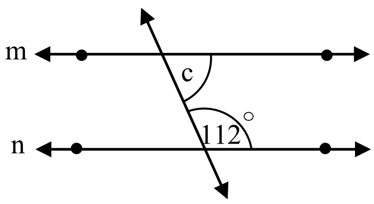
2)



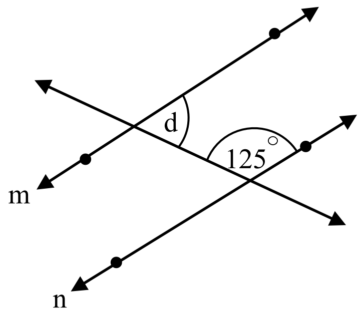
....

....

3)



4)



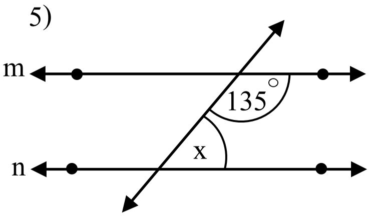
....

....

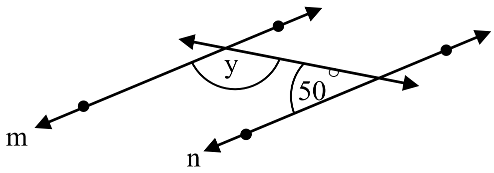
....

....

5)



6)

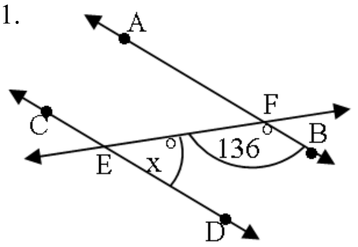


………………………………………… …………………………………………

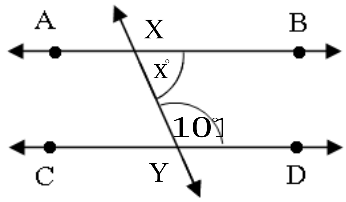
………………………………………… …………………………………………

2. จงหาค่า x ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

1.



2.



………………………………………… …………………………………………

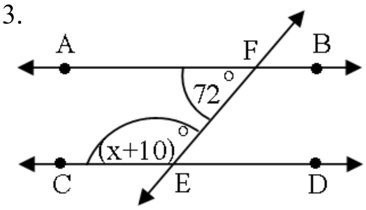
………………………………………… …………………………………………

………………………………………… …………………………………………

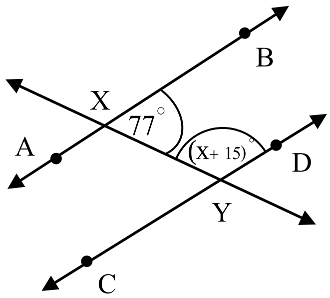
………………………………………… …………………………………………

………………………………………… …………………………………………

3.



4.



………………………………………… …………………………………………

………………………………………… …………………………………………

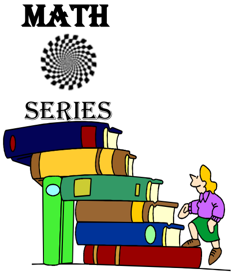
………………………………………… …………………………………………

………………………………………… …………………………………………

………………………………………… …………………………………………

………………………………………… …………………………………………

………………………………………… …………………………………………



9.2 เส้นขนานและมุมแย้ง

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ : นักเรียนสามารถ

1. บอกได□ว□ามุมคู□ใดเป□นมุมแย□ง เมื่อกำหนดให□เส□นตรงเส□นหนึ่งตัดเส□นตรงคู□หนึ่ง
2. บอกได□ว□าเมื่อเส□นตรงเส□นหนึ่งตัดเส□นตรงคู□หนึ่ง เส□นตรงคู□นั้นขนานกัน ก็ต□อเมื่อ มุมแย□งมีขนาดเท□ากัน และนำสมบัตินี้ไปใช□ได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ : นักเรียนมีความสามารถใน

1. การคิดคำนวณ
2. การแก้ปัญหา
3. การให้เหตุผล
4. การสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอ
5. การเชื่อมโยง
6. ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

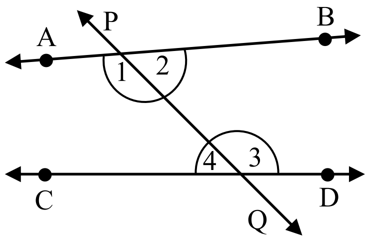
ด้านคุณลักษณะ : ปลูกฝังให้นักเรียน

1. มีความรับผิดชอบ
2. มีความสนใจใฝ่รู้
3. มีความรอบคอบ มีระเบียบวินัย
4. มีความเชื่อมั่นในตนเอง
5. มีวิจารณญาณและทำงานอย่างเป็นระบบ
6. ตระหนักในคุณค่า และมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

เส้นขนานและมุมแย้ง

เส้นตรงสองเส้น ถ้ามีเส้นตรงตัด นอกจากจะเกิดมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดแล้ว ยังมีมุมภายในที่เรียกว่า มุมแย้ง อีกสองคู่

ถ้า $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ เป็นเส้นตรงสองเส้น โดยมี $\overleftrightarrow{PQ}$ เป็นเส้นตัด



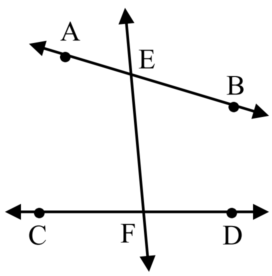
จากรูป $\hat{1}$ และ $\hat{3}$ เรียกว่า **มุมแย้ง** เป็นมุมแย้งระหว่าง $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$

และ $\hat{2}$ และ $\hat{4}$ เรียกว่า **มุมแย้ง** เป็นมุมแย้งระหว่าง $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$

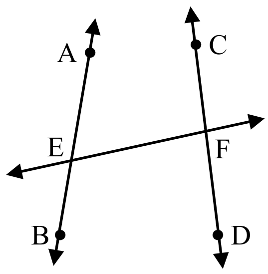
สำรวจ ตรวจสอบ มุมแย้ง

1. ในแต่ละรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด จงสำรวจว่ามุมคู่ใดเป็นมุมแย้ง

1)



2)

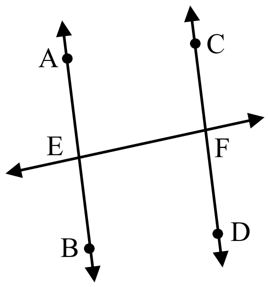


....

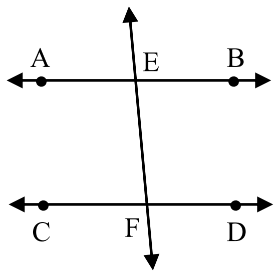
....

2. ในแต่ละรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด จงสำรวจว่ามุมแย้งคู่ใดมีขนาดเท่ากัน

1)



2)



……………………………… ………………………………

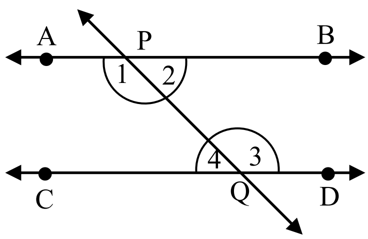
……………………………… ………………………………

จากกิจกรรมข้างต้น สรุปได้ว่า ถ้า $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ และมี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด แล้ว………………….

……………………………………………………………………………………………………

ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท	ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{PQ}$ เป็นเส้นตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด P และ Q ตามลำดับ

ต้องการพิสูจน์ว่า $\hat{1} = \hat{3}$ และ $\hat{2} = \hat{4}$

พิสูจน์ เนื่องจาก $\hat{1}+\hat{2}=$........... (……………………………………)

และ $\hat{2}+\hat{3}=$........... (ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°)

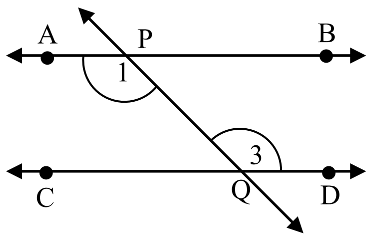
ดังนั้น $\hat{1}+\hat{2} = \hat{2}+\hat{3}$ (สมบัติของการเท่ากัน)

จะได้ .... (นำ $\hat{2}$ มาลบทั้งสองข้างของสมการ)

ในทำนองเดียวกัน สามารถพิสูจน์ได้ว่า $\hat{2}=\hat{4}$

ในการตรวจสอบว่า เส้นตรงสองเส้นขนานกันหรือไม่ นอกจากจะพิจารณาจากขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดเส้นตรงทั้งสองแล้ว ยังสามารถพิจารณาจากขนาดของมุมแย้งได้ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท	ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{PQ}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ที่จุด P และ Q ตามลำดับ ทำให้ $\hat{1} = \hat{3}$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$

พิสูจน์ เนื่องจาก $\hat{1}+\hat{2}=$........... (...)

$\hat{1} = \hat{3}$ (กำหนดให้)

.... (แทน $\hat{1}$ ด้วย $\hat{3}$)

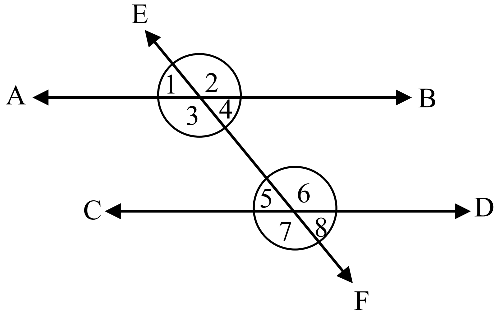
แต่ $\hat{2}$ และ $\hat{3}$ เป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด PQ

ดังนั้น $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$ (ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180° แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

จากทั้งสองทฤษฎีบทข้างต้น สามารถสรุปได้ว่า

ทฤษฎีบท	เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ และมี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด ดังรูป จงอธิบายว่ามุมคู่ใดมีขนาดเท่ากันบ้าง



วิธทำ เนื่องจาก $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัดจะได้ว่า…………………………………..

นั่นคือ…………………………………………………………………………………..

เนื่องจาก $\overleftrightarrow{EF}$ ตัดกับ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ จะได้ว่า……………………………………

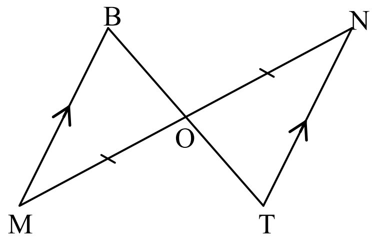
นั่นคือ…………………………………………………………………………………

โดยสมบัติของการเท่ากัน สรุปได้ว่ามีมุมที่มีขนาดเท่ากันอยู่ 2 ชุด ดังนี้

1. ……………………………………………………………………………

2 ……………………………………………………………………………

ตัวอย่างที่ 2 จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{MB} // \overleftrightarrow{TN}$ และ MO = NO จงพิสูจน์ว่า MB = NT



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{MB} // \overleftrightarrow{TN}$ และ MO = NO

ต้องการพิสูจน์ว่า MB = NT

พิสูจน์ $\overleftrightarrow{MB} // \overleftrightarrow{TN}$ และมี $\overleftrightarrow{MN}$

$B\hat{M}O$ = ... (………………………………………...
……………………………………………)

MO = NO (………………………………………..)

$M\hat{O}B$ = ... (………………………………………...
……………………………………………)

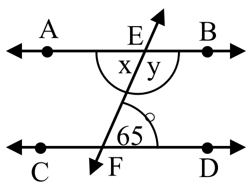
ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle CDE$ (………………………………………..)

จะได้ MB = ………… (………………………………………...
……………………………………………)

กิจกรรมที่ 9.2 : ทักษะการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสารและการเชื่อมโยง

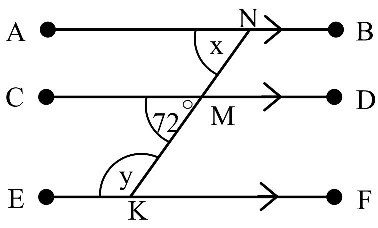
ให้นักเรียนหาค่าของ x และ y ในแต่ละข้อต่อไปนี้ พร้อมทั้งบอกเหตุผล

1. กำหนด $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ และ $E\hat{F}D = 65^\circ$



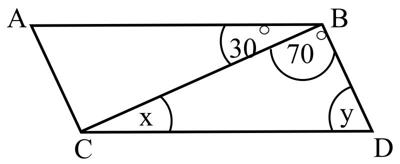
เหตุผล

2. กำหนด CYX = 72°



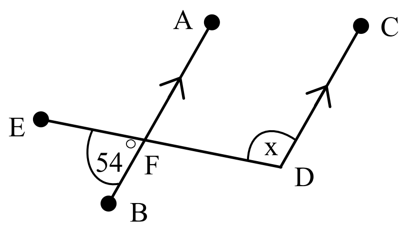
เหตุผล

3. กำหนด ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน



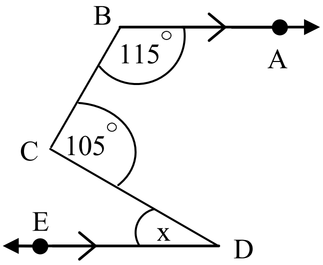
เหตุผล

4. กำหนด $E\hat{F}B = 54^\circ$



เหตุผล

5. กำหนด $A\hat{B}C = 115^\circ$ และ $B\hat{C}D = 105^\circ$



เหตุผล

....

....

....

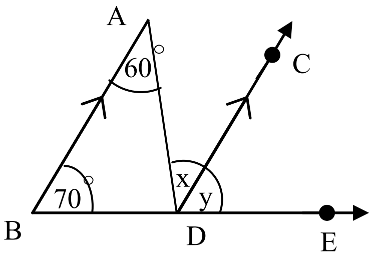
....

....

....

....

6. กำหนด $A\hat{B}D = 70^\circ$ และ $BAD = 60^\circ$



เหตุผล

....

....

....

....

....

....

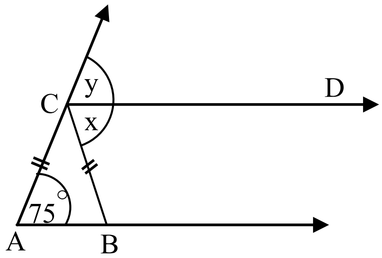
....

....

....

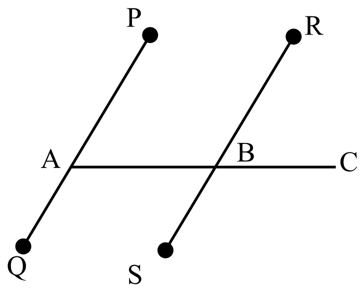
7. กำหนด สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

   $\hat{A} = 75^{\circ}$ และ $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$

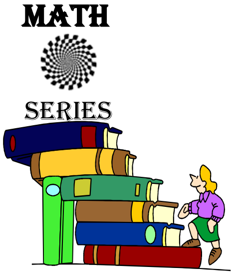


เหตุผล

8. กำหนด $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{RS}$ จงพิสูจน์ว่า PAC = $R\hat{B}C$



เหตุผล



9.3 เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ : นักเรียนสามารถ

1. บอกได□ว□า มุมคู□ใดเป□นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู□ตรงข□ามบนข□างเดียวกันของเส□นตัด เมื่อกำหนดให□เส□นตรงเส□นหนึ่งตัดเส□นตรงคู□หนึ่ง
2. บอกได□ว□า เมื่อเส□นตรงเส□นหนึ่งตัดเส□นตรงคู□หนึ่ง เส□นตรงคู□นั้นขนานกัน ก็ต□อเมื่อมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู□ตรงข□ามบนข□างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท□ากัน และนำสมบัติ

ด้านทักษะ / กระบวนการ : นักเรียนมีความสามารถใน

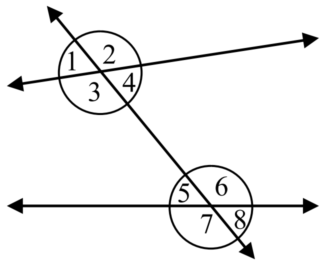
1. การคิดคำนวณ
2. การแก้ปัญหา
3. การให้เหตุผล
4. การสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอ
5. การเชื่อมโยง
6. ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ด้านคุณลักษณะ : ปลูกฝังให้นักเรียน

1. มีความรับผิดชอบ
2. มีความสนใจใฝ่รู้
3. มีความรอบคอบ มีระเบียบวินัย
4. มีความเชื่อมั่นในตนเอง
5. มีวิจารณญาณและทำงานอย่างเป็นระบบ
6. ตระหนักในคุณค่า และมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน

พิจารณารูปต่อไปนี้



จากรูป เรียก $\hat{1}, \hat{2}, \hat{7}$ และ $\hat{8}$ ว่า**มุมภายนอก**

เรียก $\hat{3}, \hat{4}, \hat{5}$ และ $\hat{6}$ ว่า**มุมภายใน**

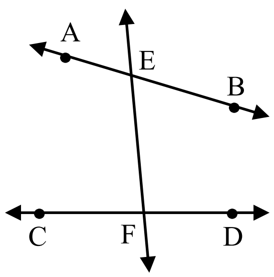
เรียก $\hat{1}$ และ $\hat{5}$ ว่าเป็น**มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด**

ในทำนองเดียวกัน จะเรียก $\hat{2}$ และ $\hat{6}$, $\hat{7}$ และ $\hat{3}$, $\hat{8}$ และ $\hat{4}$ แต่ละคู่ว่าเป็น **มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด**

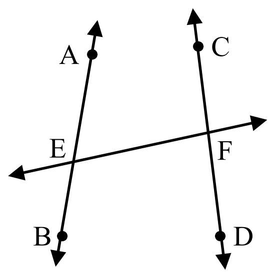
สำรวจ ตรวจสอบ มุมภายนอกและมุมภายใน

1. ในแต่ละรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด จงสำรวจว่ามุมคู่ใด เป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด

1)



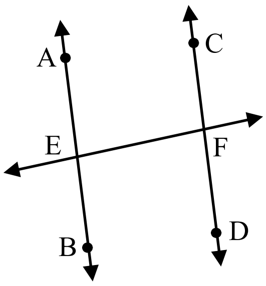
2)

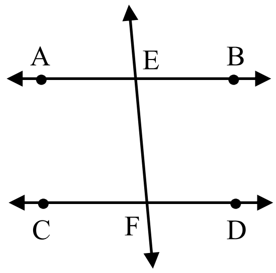


……………………………… ………………………………

……………………………… ………………………………

2. ในแต่ละรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด จงสำรวจว่า มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดคู่ใดที่มีขนาดเท่ากัน

1) 

2) 

....

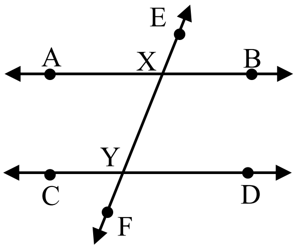
....

จากกิจกรรมข้างต้น สรุปได้ว่า ถ้า $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ และมี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด แล้ว......................

....

ซึ่งเป็นไปตามทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท	ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด มีขนาดเท่ากัน



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด

ต้องการพิสูจน์ว่า $A\hat{X}E = C\hat{Y}X, B\hat{X}E = D\hat{Y}X, C\hat{Y}F = A\hat{X}Y$ และ $D\hat{Y}F = B\hat{X}Y$

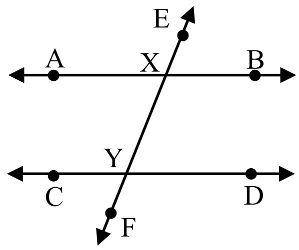
พิสูจน์

$\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$	(กำหนดให้)
$B\hat{X}Y = C\hat{Y}X$	(.. ....)
$A\hat{X}E =$	(ถ้าเส้นตรงสองเส้นตัดกัน แล้ว มุมตรงกันข้ามมีขนาดเท่ากัน)
ดังนั้น	(สมบัติของการเท่ากัน)

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $B\hat{X}E = D\hat{Y}X, C\hat{Y}F = A\hat{X}Y$ และ $D\hat{Y}F = B\hat{X}Y$

ในการตรวจสอบว่าเส้นตรงคู่หนึ่งขนานกันหรือไม่ สามารถพิจารณาจากขนาดของมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท	ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้มุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด มีขนาดเท่ากัน แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{EF}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ทำให้ $A\hat{X}E = C\hat{Y}X$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$

พิสูจน์

$A\hat{X}E + A\hat{X}Y =$ .... (.................................)

$A\hat{X}E = C\hat{Y}X$ (กำหนดให้)

.... $+ A\hat{X}Y = 180^{\circ}$ (แทน $A\hat{X}E$ ด้วย $C\hat{Y}X$)

เนื่องจาก $C\hat{Y}X$ และ $A\hat{X}Y$ เป็นภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด EF

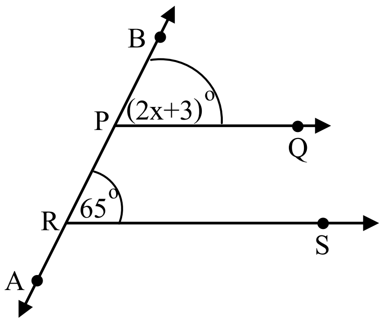
ดังนั้น $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$ (ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกันเท่ากับ 180° แล้วเส้นตรงคู่นั้นขนานกัน)

ในการพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$ อาจนำทฤษฎีบทเกี่ยวกับมุมแย้งมาใช้ก็ได้ โดยพิสูจน์ว่า $A\hat{X}Y = D\hat{Y}X$ หรือ $B\hat{X}Y = C\hat{Y}X$

จากทั้งสองทฤษฎีบทข้างต้น สามารถสรุปได้ว่า

ทฤษฎีบท	เมื่อเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง เส้นตรงคู่นั้นเส้นขนานกัน ก็ต่อเมื่อมุมภายนอกและภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ $\overleftrightarrow{PQ} \,//\, \overleftrightarrow{RS}$ และมี $\overline{AB}$ เป็นเส้นตัด ดังรูป จงหาค่า x



วิธีทำ เนื่องจาก $\overleftrightarrow{PQ} \,//\, \overleftrightarrow{RS}$ และมี $\overline{AB}$ เป็นเส้นตัด

จะได้ $B\hat{P}Q =$ .... (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่ตรงข้ามบนข้างเดียวกันของเส้นตัด มีขนาดเท่ากัน)

ดังนั้น $2x + 3 = 65$ (แทน $B\hat{P}Q$ ด้วย $2x + 3$ และแทน $P\hat{R}S$ ด้วย 65)

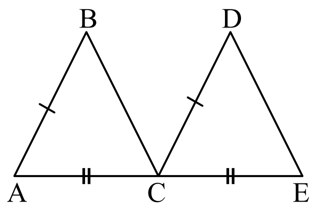
$2x =$ …………

$2x =$ …………

$x =$ …………

นั่นคือ $x =$ …………

ตัวอย่างที่ 2 จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$, AB = CD และ AC = CE จงพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{BC} \,//\, \overleftrightarrow{DE}$



กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$, AB = CD และ AC = CE

ต้องการพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{BC} \,//\, \overleftrightarrow{DE}$

พิสูจน์ พิจารณา $\triangle ABC$ และ $\triangle CDE$

AB = CD (กำหนดให้)

$B\hat{A}C = D\hat{C}E$ (………………………………………...
……………………………………………)

AC = CE (……………………………………..)

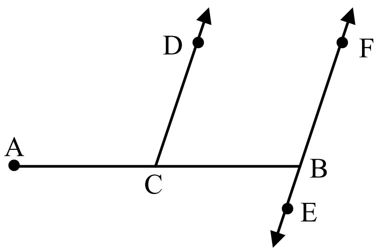
ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle CDE$ (……………………………………..)

จะได้ $A\hat{C}B = C\hat{E}D$ (……………………………………………..
……………………………………………)

นั่นคือ $\overleftrightarrow{BC} // \overleftrightarrow{DE}$ (……………………………………………...
……………………………………………
……………………………………………
……………………………………………...)

กิจกรรมที่ 9.3 : ทักษะการคิดวิเคราะห์ ให้เหตุผล และแก้ปัญหา

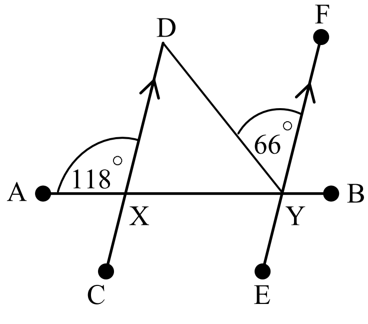
1. กำหนดให้ $\overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{EF}$ และมี $\overleftrightarrow{AB}$ เป็นเส้นตัด จงหามุมทุกคู่ที่มีขนาดเท่ากัน พร้อมทั้งเหตุผล



เหตุผล

………………………………………………………………… …………………………………………………………………
………………………………………………………………… …………………………………………………………………

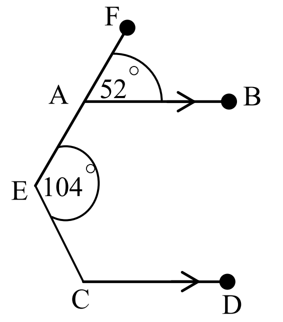
2. กำหนดให้ $\overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{EF}$ ถ้า $A\hat{X}D = 118^\circ$ และ $D\hat{Y}F = 66^\circ$ จงหาขนาดของ $X\hat{Y}D$



เหตุผล

………………………………………………………………… …………………………………………………………………
………………………………………………………………… …………………………………………………………………
………………………………………………………………… …………………………………………………………………
………………………………………………………………… …………………………………………………………………
………………………………………………………………… …………………………………………………………………
………………………………………………………………… …………………………………………………………………

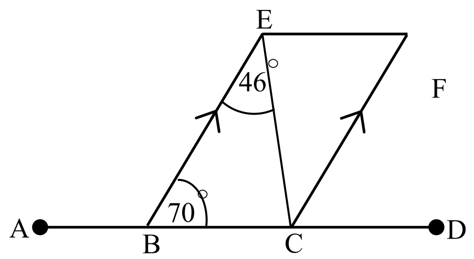
3. กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ ถ้า $B\hat{A}F = 52^\circ$ และ $A\hat{E}C = 104^\circ$ จงหาขนาดของ $E\hat{C}D$



เหตุผล

....
....
....
....
....
....
....
....

4. กำหนดให้ $B\hat{C}F = 128^\circ$ จงหาขนาดของ $D\hat{C}E$

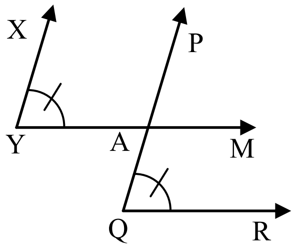


เหตุผล

....
....
....
....
....
....
....

5. กำหนดให้ $\overleftrightarrow{YM} // \overleftrightarrow{QR}$ และ $X\hat{Y}M = P\hat{Q}R$

   จงพิสูจน์ว่า $\overleftrightarrow{YX} // \overleftrightarrow{QP}$

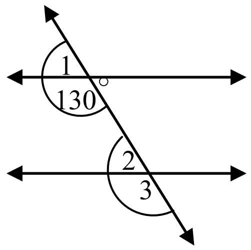


เหตุผล

....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....
....	....

6. จากรูป จงหาขนาดของมุมต่อไปนี้

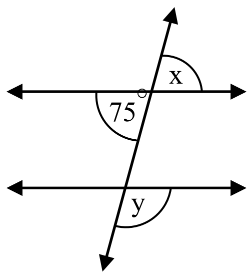
1)



$\hat{1}$ = ...

$\hat{2}$ = ...

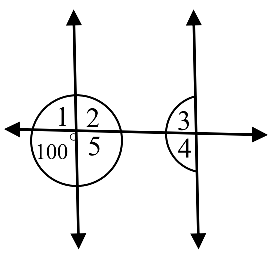
2)



$\hat{x}$ = ...

$\hat{y}$ = ...

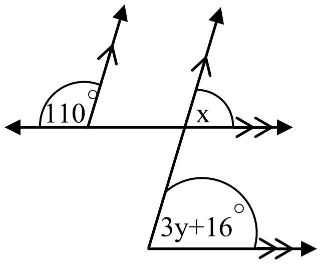
3)



$\hat{1}$ = ...

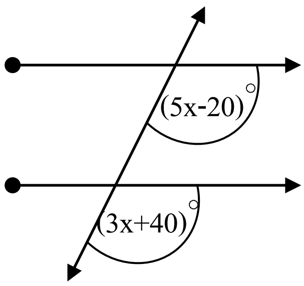
$\hat{2}$ = ...

4)



……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………

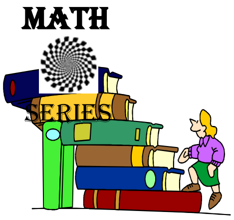
5)



……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………
……………………………………………………

ปัญหาชวนคิด

จงจัดเลขห้าสี่ตัว (5, 5, 5, 5) ให้มีค่าเป็น 56 จะเขียนอยู่ในรูปใดก็ได้ แต่ขอย้ำว่าปัญหาข้อนี้ง่ายมาก ควรใช้เวลาทำไม่เกิน 2 นาที



9.4 เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้ : นักเรียนสามารถ

1. บอกไд□ว□า ขนาดของมุ มภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา และนำสมบัตินี้ไปใช□ได□
2. บอกได□ว□า ถ□าต□อด□านใดด□านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท□ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม□ใช□มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น และนำสมบัตินี้ไปใช□ได□
3. บอกได□ว□า รูปสามเหลี่ยมสองรูปที่มีความสัมพันธ□กันแบบ มุม – มุม – ด้าน เท□ากันทุกประการและนำสมบัตินี้ไปใช□ได□
4. ใช□สมบัติเกี่ยวกับเส□นขนานและความเท□ากันทุกประการของรูปสามเหลี่ยมในการให□เหตุผลและแก□ป□ญหาได้

ด้านทักษะ / กระบวนการ : นักเรียนมีความสามารถใน

1. การคิดคำนวณ
2. การแก้ปัญหา
3. การให้เหตุผล
4. การสื่อสาร การสื่อความหมาย และการนำเสนอ
5. การเชื่อมโยง
6. ความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

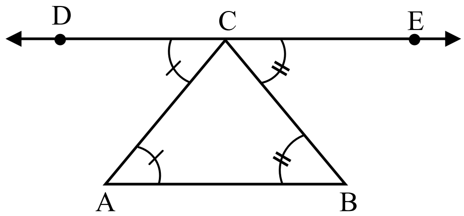
ด้านคุณลักษณะ : ปลูกฝังให้นักเรียน

1. มีความรับผิดชอบ
2. มีความสนใจใฝ่รู้
3. มีความรอบคอบ มีระเบียบวินัย
4. มีความเชื่อมั่นในตนเอง
5. มีวิจารณญาณและทำงานอย่างเป็นระบบ
6. ตระหนักในคุณค่า และมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

เส้นขนานและรูปสามเหลี่ยม

นักเรียนทราบหรือไม่ว่า "ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรู ปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับกี่องศา" **ตอบ**........................ข้อความนี้เป็นทฤษฎีบทที่สำคัญทฤษฎีบทหนึ่งทางเรขาคณิต ซึ่งสามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

ทฤษฎีบท	ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา



กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมใด ๆ

ต้องการพิสูจน์ว่า $C\hat{A}B + A\hat{B}C + B\hat{C}A = 180^\circ$

พิสูจน์ สร้าง $\overleftrightarrow{DE}$ ผ่านจุด C ให้ $\overleftrightarrow{DE} \,//\, \overleftrightarrow{AB}$

เนื่องจาก $\overline{AC}$ เป็นเส้นตัด $\overleftrightarrow{DE}$ และ $\overleftrightarrow{AB}$

$D\hat{C}A =$ .... (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)

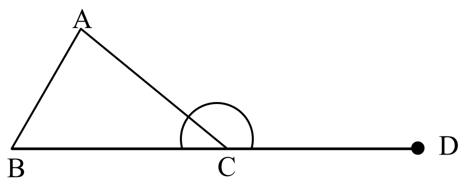
$E\hat{C}B = A\hat{B}C$ (.. ....)

$D\hat{C}A + B\hat{C}A + E\hat{C}B = 180^\circ$ (..)

$C\hat{A}B + B\hat{C}A + A\hat{B}C = 180^\circ$ (แทน $D\hat{C}A$ ด้วย $C\hat{A}B$ และ $E\hat{C}B$)

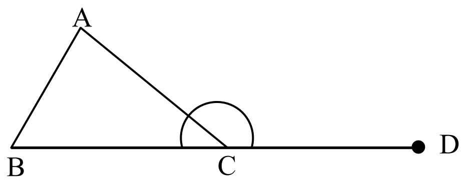
ดังนั้น $C\hat{A}B + A\hat{B}C + B\hat{C}A = 180^\circ$ (สมบัติของการเท่ากัน)

ทฤษฎีบทข้างต้น สามารถนำมาใช้พิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับขนาดของมุมภายนอกและขนาดของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยมได้ ดังต่อไปนี้



จากรูป กำหนด $\triangle ABC$ และต่อ $\overline{BC}$ ออกไปทางจุด C ถึงจุด D เรียก $A\hat{C}D$ ว่า**มุมภายนอก**ของ $\triangle ABC$ เรียก $A\hat{C}B$ และ $A\hat{C}D$ ว่าเป็น **มุมประชิด** หรืออาจกล่าวว่า $A\hat{C}B$ เป็นมุมประชิดของ $A\hat{C}D$

ทฤษฎีบท	ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น



กำหนดให้ $\triangle ABC$ มี $A\hat{C}D$ เป็นมุมภายนอกที่ได้จากการต่อ $\overline{BC}$ ออกไปทางจุด C

ต้องการพิสูจน์ว่า $A\hat{C}D = A\hat{B}C + C\hat{A}B$

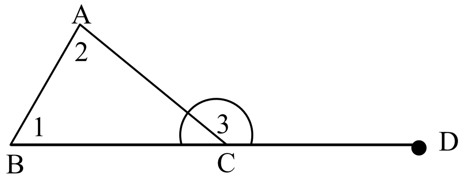
พิสูจน์ เนื่องจาก $A\hat{C}D + ... = 180^\circ$ (ขนาดของมุมตรง)

และ $A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B = 180^\circ$ (……………………………………..
……………………………………...)

จะได้ $A\hat{C}D + B\hat{C}A = A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B$ (…………………………….)

ดังนั้น $A\hat{C}D = A\hat{B}C + C\hat{A}B$ (…………………………………….)

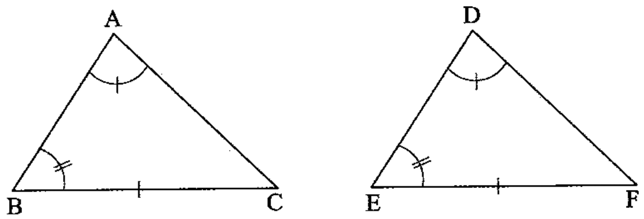
นำไปใช้



จากรูป $\triangle ABC$ มี $A\hat{C}D$ เป็นมุมภายนอกที่ได้จากการต่อ $\overline{BC}$ ออกไปทางจุด C จะได้ว่า

$\hat{3} = \hat{1} + \hat{2}$ หรือ $\hat{1} + \hat{2} = \hat{3}$

ทฤษฎีบท	ถ้ารูปสามเหลี่ยมสองรูปมีมุมที่มีขนาดเท่ากันสองคู่ และด้านคู่ที่อยู่ตรงข้ามกับมุมคู่ที่มีขนาดเท่ากัน ยาวเท่ากันหนึ่งคู่ แล้วรูปสามเหลี่ยมสองรูปนั้นเท่ากันทุกประการ



กำหนดให้ $\triangle ABC$ และ $\triangle DEF$ มี $C\hat{A}B = F\hat{D}E,\ A\hat{B}C = D\hat{E}F$ และ $BC = EF$

ต้องการพิสูจน์ว่า $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

พิสูจน์ เนื่องจาก $C\hat{A}B = F\hat{D}E$ และ $C\hat{A}B = F\hat{D}E,\ A\hat{B}C = D\hat{E}F$ (กำหนดให้)

$C\hat{A}B + A\hat{B}C + B\hat{C}A = 180^{\circ}$ (...
....)

$F\hat{D}E + ... + E\hat{F}D = ...$ (ขนาดของมุมภายในทั้งสามมุมของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเท่ากับ 180 องศา

จะได้ $C\hat{A}B + A\hat{B}C + B\hat{C}A = F\hat{D}E + D\hat{E}F + E\hat{F}D$

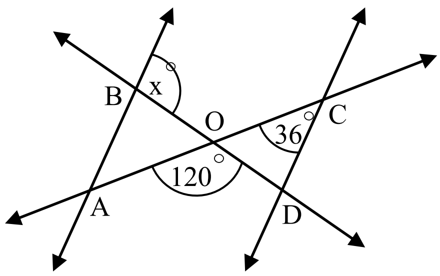
(...)

ดังนั้น $B\hat{C}A = E\hat{F}D$ (...)

และเนื่องจาก $BC = EF$ (...)

ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (...)

ตัวอย่างที่ 1 จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{AC}$ ตัด $\overleftrightarrow{BD}$ ที่จุด O , $A\hat{O}D = 120^{\circ}$ และ $O\hat{C}D = 36^{\circ}$ จงหาค่า x



วิธีทำ เนื่องจาก $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $\overleftrightarrow{AC}$ เป็นเส้นตัด (กำหนดให้)

จะได้ $B\hat{A}O = ... = 36^{\circ}$ (ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกันและมีเส้นตัด แล้วมุมแย้งมีขนาดเท่ากัน)

เนื่องจาก $A\hat{O}D$ เป็นมุมภายนอกของ $\triangle COD$

ดังนั้น $A\hat{O}D = D\hat{C}O + C\hat{D}O$ (ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไ ม่ใช่มุมประชิดของมุมภายนอกนั้น)

จะได้ .... (แทน $A\hat{O}D$ ด้วย 120 และแทน $D\hat{C}O$ ด้วย 36)

$C\hat{D}O = 120 - 36$ (สมบัติของการเท่ากัน)

$= ....$

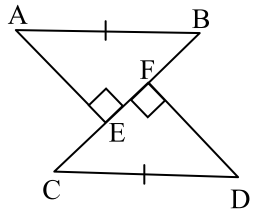
เนื่องจาก $x + C\hat{D}O = 180^{\circ}$ (ขนาดของมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดเส้นขนานรวมกันเท่ากับ 180°)

จะได้ .... (แทน $C\hat{D}O$ ด้วย 84)

.... (สมบัติของการเท่ากัน)

ดังนั้น ....

ตัวอย่างที่ 2



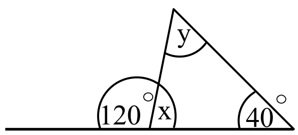
จากรูป กำหนดให้ $\triangle$ ABC และ $\triangle$ DCF เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $A\hat{E}B$ และ $D\hat{F}C$ เป็นมุมฉาก $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ และ AB = CD จงพิสูจน์ว่า AE = DF

กำหนดให้	$\triangle$ ABC และ $\triangle$ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก	
	$A\hat{E}B = D\hat{F}C = 90^\circ$, $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ และ AB = CD	
ต้องการพิสูจน์ว่า	AE = DF	
พิสูจน์	เนื่องจาก $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$	(...)
	จะได้ $A\hat{B}E = D\hat{C}F$	(... ....)
	$A\hat{E}B = D\hat{F}C = 90^\circ$	(...)
	AB = CD	(...)
	ดังนั้น $\triangle ABC \cong \triangle DCF$	(...)
	นั่นคือ AE = DF	(... ....)

กิจกรรมที่ 9.4 : ทักษะการคิดวิเคราะห์ แก้ปัญหา สื่อสาร สื่อความหมาย และการเชื่อมโยง

จงหาค่า x และ y จากรูปที่กำหนด

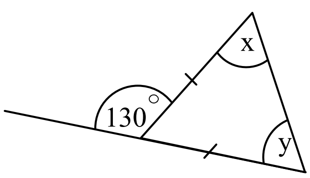
1.



$\hat{x}$ = ...

$\hat{y}$ = ...

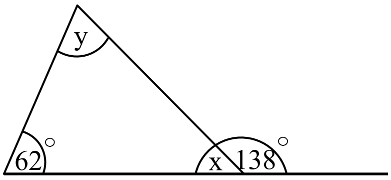
2.



$\hat{x}$ = ...

$\hat{y}$ = ...

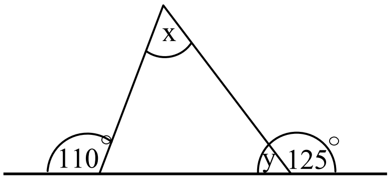
3.



$\hat{x}$ = ……………………………………..

$\hat{y}$ = ……………………………………..

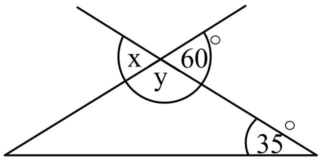
4.



$\hat{x}$ = ……………………………………..

$\hat{y}$ = ……………………………………..

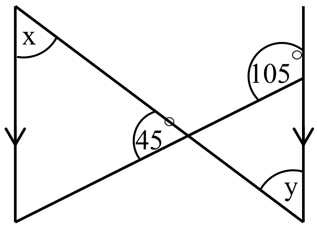
5.



$\hat{x}$ = ……………………………………..

$\hat{y}$ = ……………………………………..

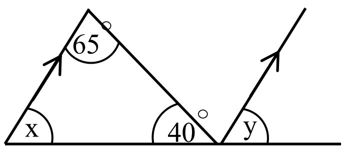
6.



$\hat{x}$ = ……………………………………..

$\hat{y}$ = ……………………………………..

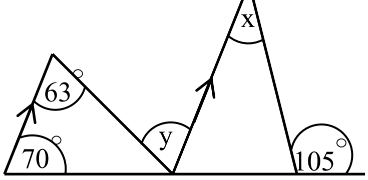
7.



$\hat{x}$ = ……………………………………..

$\hat{y}$ = ……………………………………..

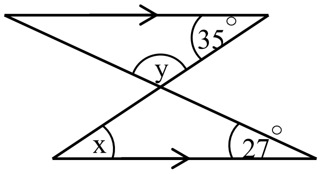
8.



$\hat{x}$ = ……………………………………..

$\hat{y}$ = ……………………………………..

9.

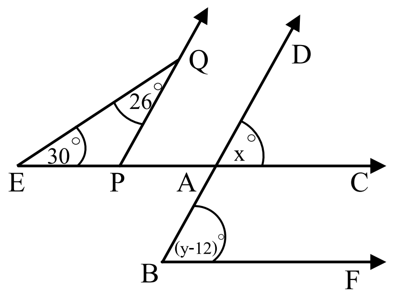


$\hat{x}$ = ……………………………………..

$\hat{y}$ = ……………………………………..

12345 กิจกรรมที่ 9.5 : ทักษะการคิดวิเคราะห์ แก้ปัญหา สื่อสาร สื่อความหมาย และการเชื่อมโยง

1.



จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{PQ} // \overleftrightarrow{AD}$ และ $\overleftrightarrow{AC} // \overleftrightarrow{BF}$ จงหาค่า x และ y

……………………………………………………………………

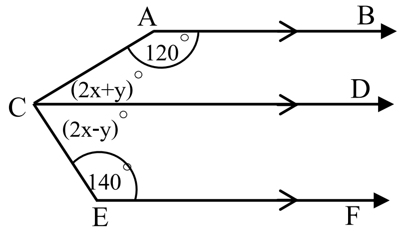
……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

2.



จากรูป กำหนดให้ $A\hat{C}D = (2x + y)^o$ และ $D\hat{C}E = (2x - y)^o$ จงหาค่า x และ y

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

………

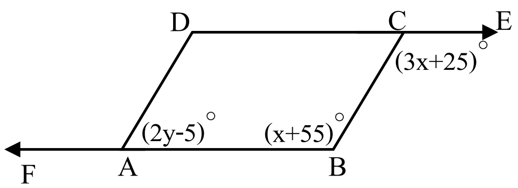
………

………

………

………

3.



จากรูป กำหนดให้ ☐ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน $A\hat{B}C = (x + 55)^o$, $B\hat{C}E = (3x + 25)^o$ และ $B\hat{A}D = (2y - 5)^o$ จงหาค่า x และ y

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

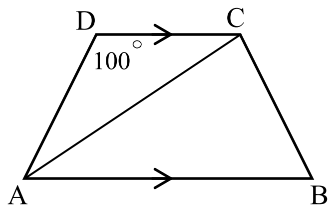
………

………

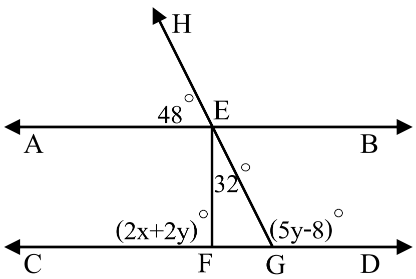
………

………

………

4. 

จากรูป กำหนดให้ □ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มี $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$, $A\hat{C}D = (2x + y)^{o}$, $C\hat{A}D = (5x + y)^{o}$ และ $B\hat{A}C = (5x - y)^{o}$ จงหาค่า x และ y

5. 

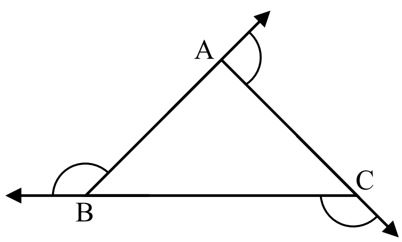
จากรูป กำหนดให้ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ มี $C\hat{E}F = (2x + 2y)^{o}$ และ $D\hat{G}E = (5y - 8)^{o}$ จงหาค่า x และ y

6. จงพิสูจน์ว่า “ขนาดของมุมภายในของรูปสี่เหลี่ยมใด ๆ รวมกันเท่ากับ 360 องศา”

(แนะ ให้วาดรูปประกอบ)

…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

7. จากรูป กำหนดให้ $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมใด ๆ จงพิสูจน์ว่าขนาดของมุมภายนอกของ $\triangle ABC$ รวมกันเท่ากับ 180 องศา



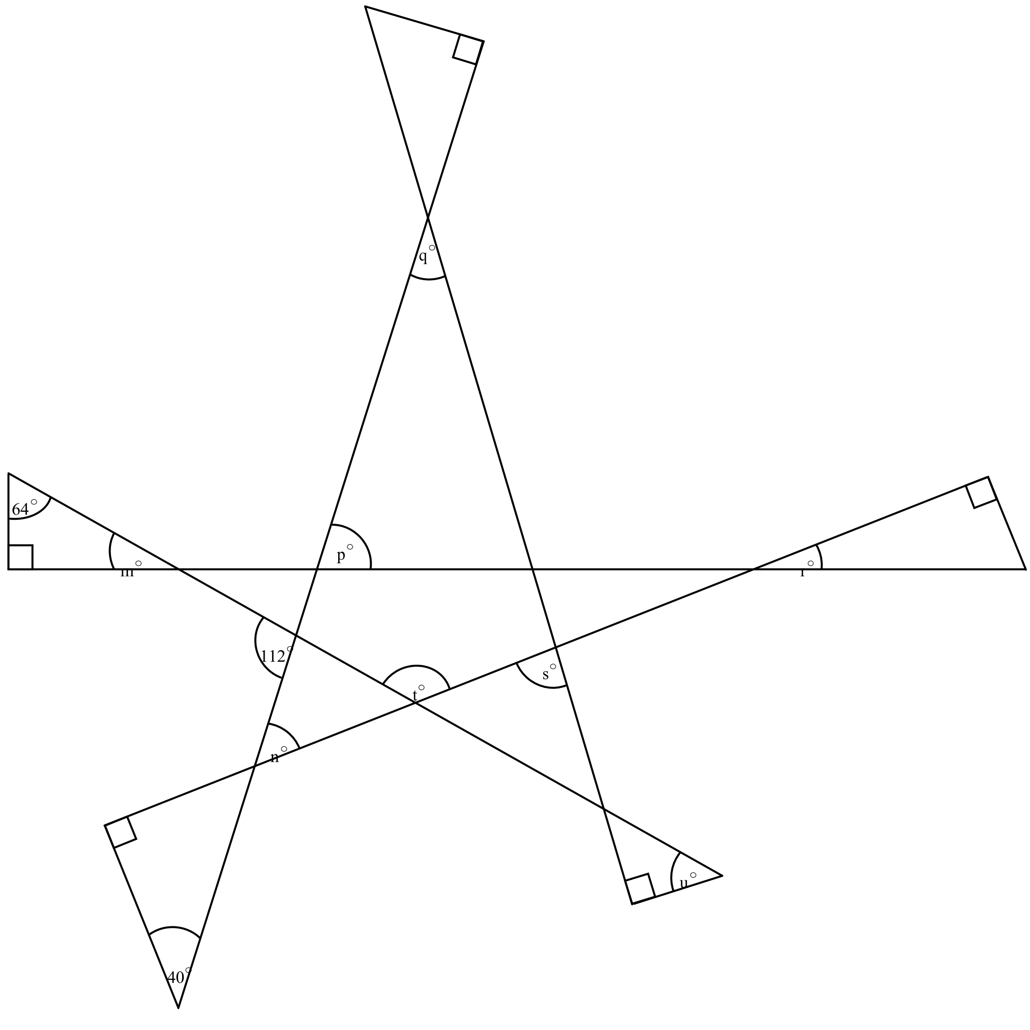
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………
…………………………………………………………………………………………………

ชวนคิดคณิตศาสตร์

หาได้หรือไม่

ลองทำกิจกรรมดู แล้วคุณจะรู้

จงหาค่า m, n, p, q, s, s, t และ u จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้



....

....

....

....

....