เส้นขนาน

1. เส้นขนานและมุมภายใน

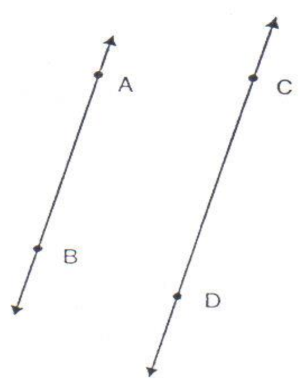
บทนิยาม	เส้นตรงสองเส้นที่อยู่บนระนาบเดียวกัน ขนานกันเมื่อเส้นตรงทั้งสองนี้ไม่ตัดกัน

เมื่อ $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{CD}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\overleftrightarrow{AB} \,//\, \overleftrightarrow{CD}$

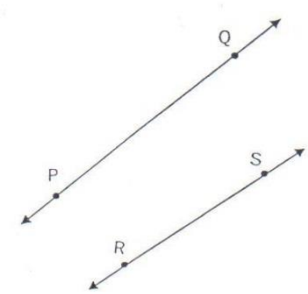
เส้นตรง m ขนานกับเส้นตรง n

ให้พิจารณาว่า เส้นตรงคู่ใดขนานกัน

1)

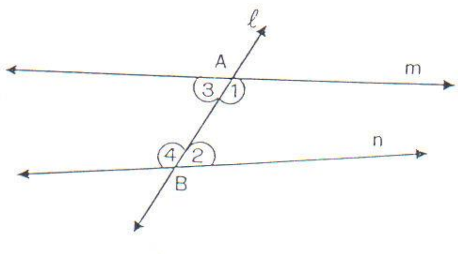


2)



พิจารณาเส้นตรงคู่ใดขนานกันโดยใช้บทนิยามนั้นอาจใช้ไม่สะดวก เพราะในหาจุดตัดของเส้นคู่ขนานนั้น นักเรียนอาจต้องเขียนรูปโดยลากเส้นให้ยาวออกไปมาก ๆ จึงเห็นว่าเส้นตรงทั้งสองตัดกัน

ต่อไปนี้เป็นวิธีอีกแบบหนึ่งจะพิจารณาว่าเส้นตรงคู่ใดขนานกัน โดยใช้มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด



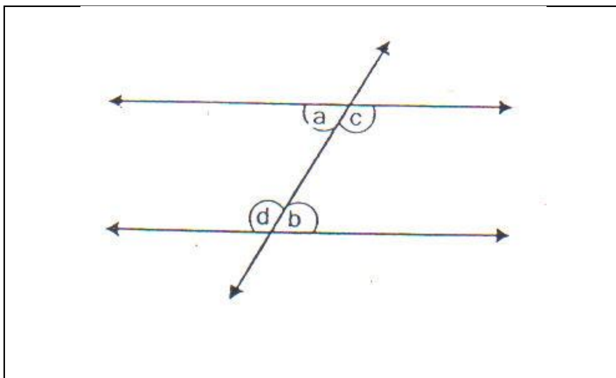
เส้นตรง l ตัดเส้นตรง m และ n ที่จุด A และจุด B เรียกเส้นตรง l หรือ $\overleftrightarrow{AB}$ ว่าเส้นตัด AB

- เรียก $\hat{1}$ และ $\hat{2}$ ว่ามุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด
- เรียก $\hat{3}$ และ $\hat{4}$ ว่ามุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

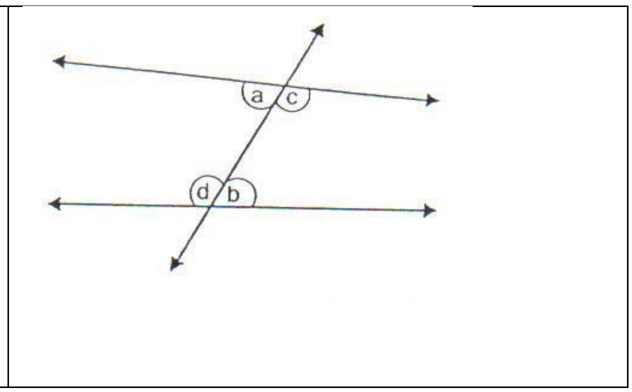
2. เส้นขนานและมุมแย้ง

ให้นักเรียนดูรูป

เส้นตรงที่ขนานกัน



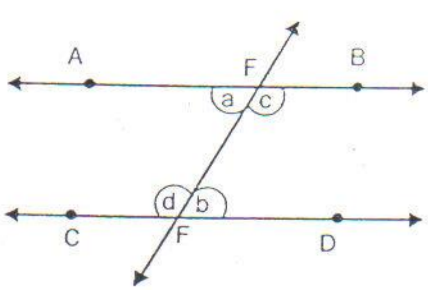
เส้นตรงที่ไม่ขนานกัน



จากรูป เรียกมุม a และมุม b ว่ามุมแย้ง

เรียกมุม c และมุม d ว่ามุมแย้ง

ถ้าเส้นตรงสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัดแล้ว มุมแย้งจะมีขนาดเท่ากัน

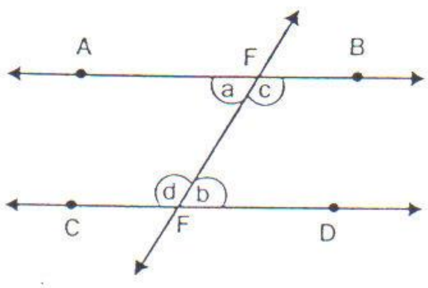


จากรูป $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{CD}$ และมี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด ทำให้เกิดมุมแย้ง จะได้ว่า

มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน คือ $\hat{a} = \hat{b}$

และ $\hat{c} = \hat{d}$

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่ง ทำให้เกิดมุมแย้งมีขนาดเท่ากันแล้ว เส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน



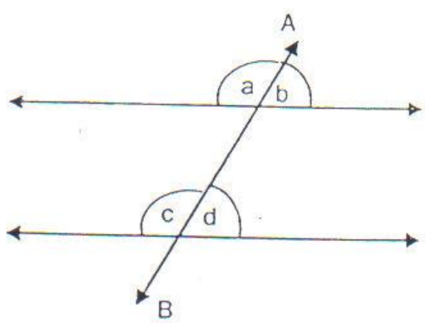
จากรูป $\overleftrightarrow{EF}$ ตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$ ทำให้มุมแย้งมีขนาดเท่ากัน

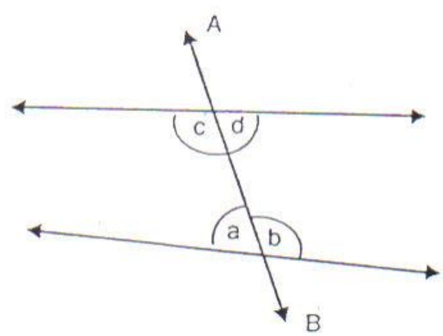
คือ $\hat{a} = \hat{b}$ หรือ $\hat{c} = \hat{d}$

แล้วจะได้ว่า เส้นตรง $\overleftrightarrow{AB}$ ขนานกับ $\overleftrightarrow{CD}$

3. เส้นขนานและมุมภายนอกกับมุมภายใน

จากรูป





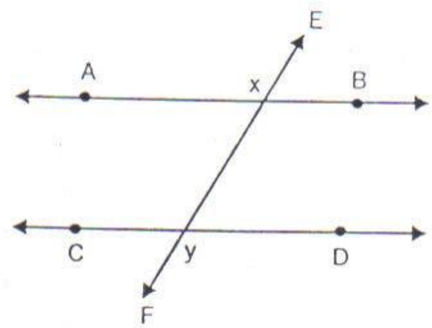
เราเรียก $\hat{a}$ และ $\hat{b}$ ว่ามุมภายนอก

$\hat{c}$ และ $\hat{d}$ ว่ามุมภายใน

$\hat{a}$ และ $\hat{c}$ เป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด AB

$\hat{b}$ และ $\hat{d}$ เป็นมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด AB

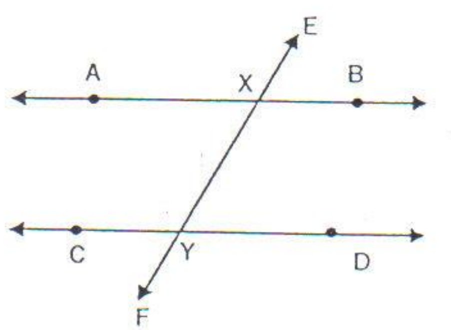
ถ้าเส้นตัดสองเส้นขนานกัน และมีเส้นตัดแล้วมุมภายนอกและมุมภายในที่อยู่บนข้าง
เดียวกันของเส้นตัดจะมีขนาดเท่ากัน



จากรูป $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ และมี $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด
จะได้ว่า

$A\hat{X}E = C\hat{Y}X$ $E\hat{X}B = X\hat{Y}D$

ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงคู่หนึ่งทำให้มุมภายนอก และมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัดมีขนาดเท่ากันแล้ว เส้นตรงคู่นั้นจะขนานกัน



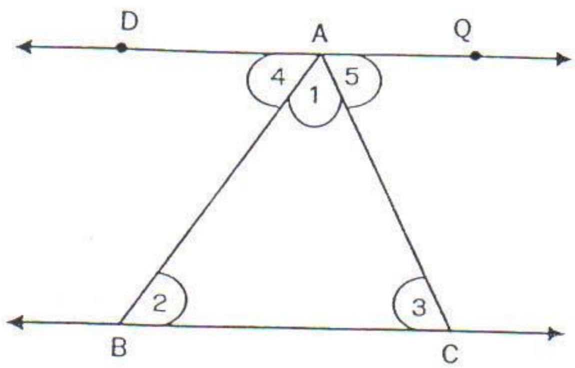
จากรูปกำหนดให้ $\overleftrightarrow{EF}$ เป็นเส้นตัด $\overleftrightarrow{AB}$ และ $\overleftrightarrow{CD}$
ทำให้

$A\hat{X}E = C\hat{Y}X$, $E\hat{X}B = X\hat{Y}D$

จะได้ว่า $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$

4. รูปสามเหลี่ยมและเส้นขนาน

จากรูปสามเหลี่ยม ABC



มี $\overline{BC}$ เป็นฐานลาก $\overleftrightarrow{PQ} // \overline{BC}$ และผ่านจุด A จะได้

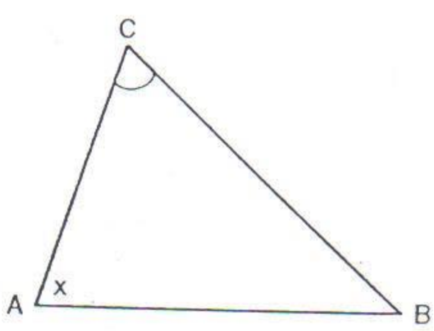
$$\hat{2} = \hat{4} \text{ และ } \hat{3} = \hat{5}$$

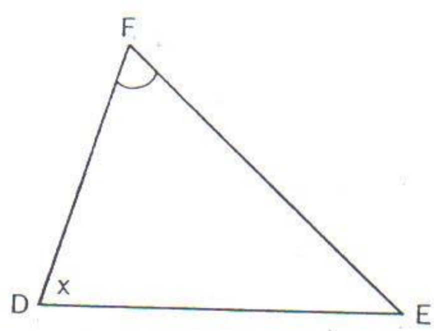
แต่ $\hat{1} + \hat{4} + \hat{5} = 180^\circ$ เพราะเป็นมุมตรง

ดังนั้น $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$ แทนค่าด้วยมุมที่เท่ากัน

สรุปได้ว่า

ขนาดของมุมทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมใด ๆ รวมกันได้ 180





จากรูป ΔABC และ ΔDEF

มี $C\hat{A}B = F\hat{D}E$

$A\hat{C}B = D\hat{F}E$

และ $A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B = 180^\circ$ (สมบัติมุมภายในรูปสามเหลี่ยม)

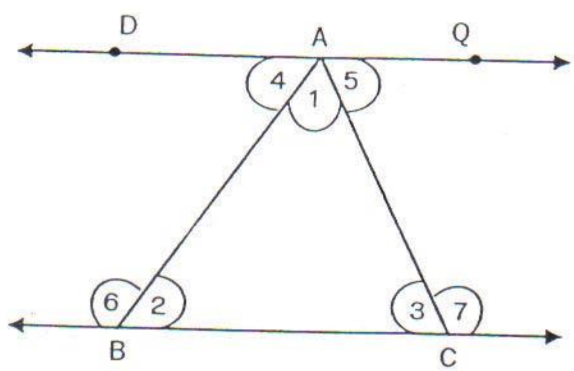
$D\hat{E}F + E\hat{F}D + F\hat{D}E = 180^\circ$ (สมบัติมุมภายในรูปสามเหลี่ยม)

ดังนั้น $A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B = D\hat{E}F + E\hat{F}D + F\hat{D}E$ (ต่างเท่ากับ 180°)

แต่ $C\hat{A}B = F\hat{D}E$ และ $A\hat{C}B = D\hat{F}E$ (กำหนดให้)

เพราะฉะนั้น $A\hat{B}C - D\hat{E}F$ (สมบัติการตัดออก)

ถ้ามุมของรูปสามเหลี่ยมสองรูปใด ๆ มีขนาดเท่ากันสองคู่แล้วมุมคู่ที่สามจะมีขนาดเท่ากันด้วย



กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC มี $\overline{BC}$ เป็นฐาน ลาก $\overleftrightarrow{PQ} // \overline{BC}$ และผ่านจุด A

จะได้ $\hat{4} + \hat{6} = 180^\circ$ (มุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด)

$\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = 180^\circ$ (ผลบวกของมุมภายในของรูปสามเหลี่ยม)

ดังนั้น $\hat{4} + \hat{6} = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3}$ (ต่างเท่ากับ 180)

แต่ $\hat{4} = \hat{2}$ (มุมแย้ง)

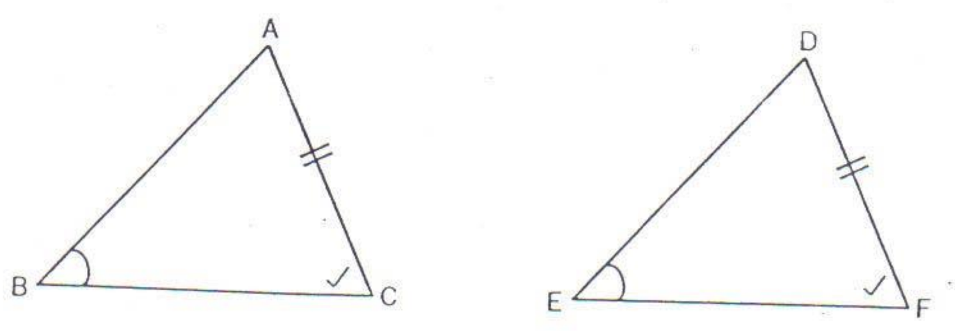
เพราะฉะนั้น $\hat{6} = \hat{1} + \hat{3}$ (สมบัติการตัดออก)

ในทำนองเดียวกัน $\hat{7} = \hat{1} + \hat{2}$

สรุปได้ว่า

ถ้าต่อด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมออกไป มุมภายนอกที่เกิดขึ้นจะมีขนาดเท่ากับผลบวกของขนาดของมุมภายในที่ไม่ใช่มุมประชิด

ความสัมพันธ์แบบ มุม – มุม – ด้าน

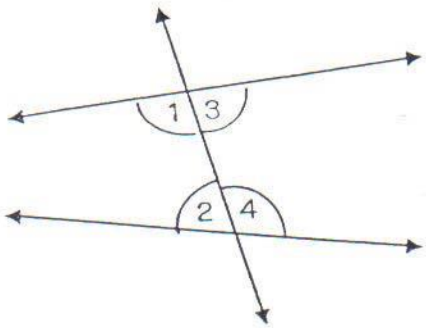


กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC และรูปสามเหลี่ยม DEF มี $\hat{B} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{F}$ และ $\overline{AC} = \overline{DF}$ จะได้ว่า รูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากันทุกประการกับรูปสามเหลี่ยม DEF ซึ่งเป็นความสัมพันธ์แบบ มุม – มุม – ด้าน (ม.ม.ด)

แบบฝึกหัด

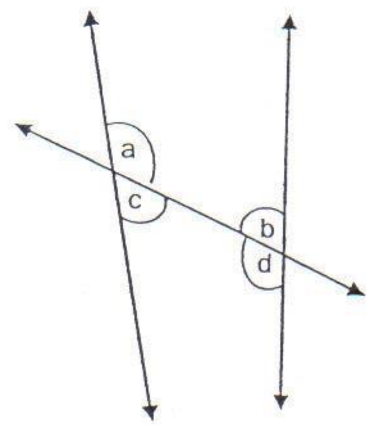
1. ให้นักเรียนบอกว่ามุมคู่ใดที่เป็นมุมภายในที่อยู่บนข้างเดียวกันของเส้นตัด

1)



$\hat{1}$ กับ $\hat{2}$ และ ....

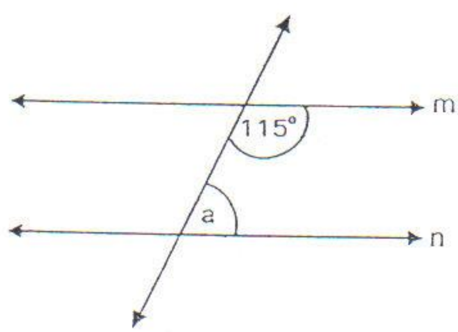
2)



$\hat{a}$ กับ $\hat{b}$ และ ....

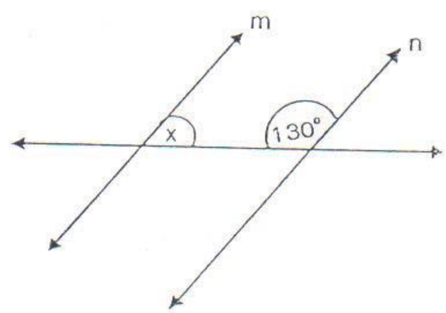
2. กำหนดเส้นตรง m และ n ขนานกันและมีเส้นตัดให้นักเรียนหาค่าของตัวแปรในแต่ละข้อ

1)



$\hat{a}$ = ……………………

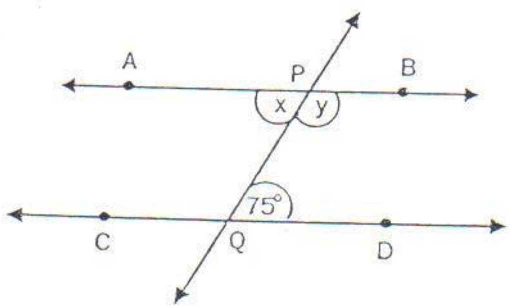
2)



$\hat{x}$ = ……………………

3. ให้นักเรียนหาค่า x และ y ในแต่ละข้อต่อไปนี้ พร้อมทั้งให้เหตุผลประกอบ

1)

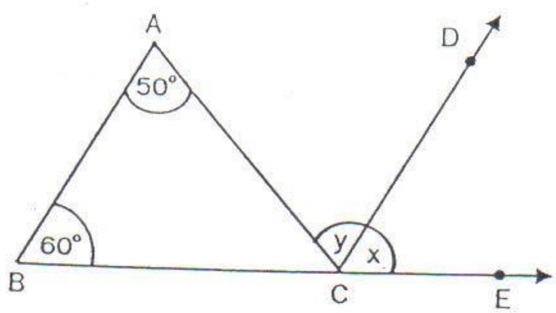


กำหนด $\overleftrightarrow{AB}$ // $\overleftrightarrow{CD}$ และ $P\hat{Q}D$ = 75°

$\hat{x}$ = ……………………………………

$\hat{y}$ =…………………………………………

2)



กำหนด $\overline{AB}$ // $\overrightarrow{CD}$

$B\hat{A}C$ = 50°

$A\hat{B}C$ = 60°

$A\hat{C}E$ = …………………………………

เฉลยแบบฝึกหัด

1. **เฉลย** 1) $\hat{3}$ กับ $\hat{4}$ 2) $\hat{e}$ กับ $\hat{d}$

2. **เฉลย** 1) $\hat{a} = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$

   2) $\hat{x} = 180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$

3. **เฉลย** 1) $\hat{x} = 75^\circ$ (มุมแย้ง)

   $\hat{y} = 180^\circ - 75^\circ$ (ผลบวกของมุมภายในบนข้างเดียวกันของเส้นตัด)

   $= 105^\circ$

   2) $\hat{y} = 50^\circ$ (มุมแย้ง)

   $\hat{x} = 180^\circ - \hat{y} - A\hat{B}C$ (ขนาดของมุมตรง)

   $= 180^\circ - 50^\circ - 70^\circ$

   $= 60^\circ$