สรุป...สูตร

คณิตศาสตร์

สารบัญ

ห.ร.ม. และ ค.ร.น.

การหา ห.ร.ม.

1. แยกตัวประกอบของแต่ละจำนวน

2. ตรวจดูเฉพาะตัวที่เหมือนกันทุกบรรทัด แล้วชักมาตัวเดียว แล้วคูณกัน

ตัวอย่าง หา ห.ร.ม. ของ 24, 36, 43

24 = 2 x 2 x 2 x 2 x 3

36 = 2 x 2 x 3 x 3

43 = 2 x 2 x 2 x 2 x 3

ดังนั้น ห.ร.ม. คือ 2 x 2 x 3 = 12

การหา ค.ร.น.

1. แยกตัวประกอบของแต่ละจำนวน

2. พิจารณาตัวที่เหมือนกันเอามาตัวเดียว ตัวที่ต่างกันหมดเอามาทุกตัว แล้วนำมาคูณกัน

ตัวอย่าง หา ค.ร.น. ของ

6, 12, 24

6 = 3 x 2

12 = 3 x 2 x 2

24 = 3 x 2 x 2 x 2

เอาตัวกรอบซึ่งมีเลข 3, 2, 2 ส่วนนอกนั้นเอามาทุกตัวคือ 2 แล้วนำมาคูณกัน จะได้

3 x 2 x 2 x 2 = 24 ความสัมพันธ์ระหว่าง ห.ร.ม. และ ค.ร.น. 1. ถ้า a, b เป็นจำนวนเต็มบวก และ c

เป็น ห.ร.ม. ของ a, b จะได้ว่า ค.ร.น. ของ a และ b เท่ากับ ab หรือท่องว่า ห.ร.ม. X ค.ร.น. = เลข 2

จำนวนนั้นคูณกัน

ตัวอย่างจำนวนนับสองจำนวนมีผลคูณเท่ากับ 80 และมี ห.ร.ม.เท่ากับ 2 จงหา ค.ร.น.ของจำนวนทั้งสอง วิธีทำ ห.ร.ม. X ค.ร.น. =เลข 2

จำนวนคูณกัน 2 X ค.ร.น. = 80

การบวกและการลบ

การบวกและการลบ

การบวก

ก. 10 + 8 = (+10) + (+8) = 18

ข. (-7) + (-5) = - 7 - 5 = -12

ค. - 5 + 8 = (-5) + (+8) = 3

ง. - 4 + (-7) = - 11

จ. 8 + (-6) = 8 - 6 = 2

การลบ

ก. 11 - 8 = (+11) - (+8) = 3

ข. -7 - (-8) = - 7 + 8 = +1

ค. - 5 - (+9) = -5 - 9 = - 14

ง. - 2 - (-7) = - 2 + 7 = 5

จ. 8 - (-7) = 8 + 7 = 15

จะเห็นได้ว่า เวลาบวกเลขที่มีเครื่องหมาย ถ้าเครื่องหมายเหมือนกันก็เอาไปรวมกัน

ถ้าเครื่องหมายต่างกันก็เอาไปหักกัน จำนวนที่เหลือก็มีเครื่องหมายตามจำนวนมาก ในการลบนั้น

เราเปลี่ยนเครื่องหมายตัวลบให้เป็นตรงข้ามคือ ถ้าตัวลบเป็นจำนวนลบก็เปลี่ยนเป็นจำนวนบวก

แล้วเอาไปบวกกับตัวตั้ง ถ้าตัวลบเป็นจำนวนบวกก็เปลี่ยนเป็นจำนวนลบ

แล้วเอาไปบวกกับตัวตั้ง

ความสัมพันธ์

ความสัมพันธ์

1. **ผลคูณคาร์ทีเซียน** ของเซต A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$ คือ เซตของคู่อันดับ (a,b) ทั้งหมด โดยที่ $a \in A$ และ $b \in B$

   ถ้า เซต A มีจำนวนสมาชิก m ตัว. และ เซต B มีจำนวนสมาชิก n ตัว.
   แล้ว $A \times B$ จะมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ mn ตัว
2. **ความสัมพันธ์** r คือ เซตของคู่อันดับ (a, b) โดยที่ถ้า $r \subset A \times B$ แล้วเรียกว่า r <u>เป็นความสัมพันธ์จาก</u> A <u>ไป</u> B หรือถ้า $r \subset A \times A$ จะเรียกว่า r <u>เป็นความสัมพันธ์ใน</u> A

   ถ้า เซต A มีจำนวนสมาชิก m ตัว. และ เซต B มีจำนวนสมาชิก n ตัว. และ $r \subset A \times B$ แล้ว จะมี r ได้ทั้งหมด r^{mn} แบบ.
3. **โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์**

นิยาม	ถ้ากำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์
	โดเมนของ r คือ เซตของสมาชิก ตัวหน้า ของคู่อันดับ ใน r เขียนแทนด้วย D_r
	เรนจ์ ของ r คือ เซตของสมาชิก ตัวหลัง ของคู่อันดับ ใน r เขียนแทนด้วย R_r

จากนิยามเราอาจเขียนสั้น ๆ ว่า $D_r = \{x \mid (x,y) \in R\}$

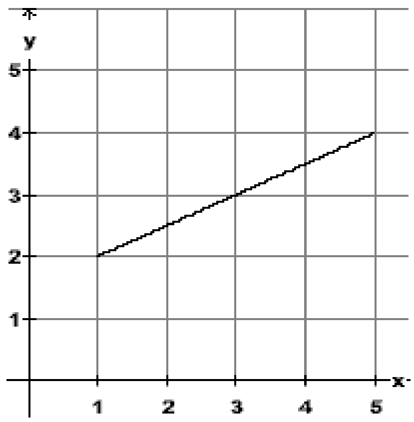
$$R_r = \{y \mid (x,y) \in R\}$$

<u>**ตัวอย่าง**</u> ถ้ากำหนดให้ $r = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r

<u>**วิธีทำ**</u> สมาชิกตัวหน้าของ r คือ 1, 2 และ 3 ดังนั้น โดเมน $(D_r) = \{1,2,3\}$ <u>Ans</u>

สมาชิกตัวหลังของ r คือ a, b และ c ดังนั้น เรนจ์ $(R_r) = \{a,b,c\}$ <u>Ans</u>

<u>**ตัวอย่าง**</u> พิจารณากราฟของความสัมพันธ์ r ดังรูป จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r



<u>**วิธีทำ**</u> จากรูปจะเห็นว่าคู่อันดับ (x,y) ของ r ต่อเนื่องกัน

เมื่อพิจารณาค่าของ x จะพบว่ามีค่าตั้งแต่ 1 ถึง 5 หรือ $1 \le x \le 5$

ซึ่งก็คือค่าของ D_r นั่นเอง $\therefore D_r = \{x \in R \mid 1 \le x \le 5\}$ หรือ $D_r = [1,5]$ <u>Ans</u>

เมื่อพิจารณาค่าของ y จะพบว่ามีค่าตั้งแต่ 2 ถึง 4 หรือ $2 \le y \le 4$

ซึ่งก็คือค่าของ R_r นั่นเอง $\therefore R_r = \{y \in R \mid 2 \le y \le 4\}$ หรือ $R_r = [2,4]$ <u>Ans</u>

ในกรณีทั่วไป เรามักที่จะทราบความสัมพันธ์ r ในรูปของสมการ มา เช่น $x + y - 1 = 0$ เป็นต้น. ซึ่งเราก็จะมาสนใจที่จะหา ค่า โดเมนและ เรนจ์ของความสัมพันธ์ ที่ให้มาในรูปแบบของสมการ(หรืออสมการ)ดังนี้

ตรรกศาสตร์

ตรรกศาสตร์เบื้องต้น

1. **ประพจน์** (Propositions or Statements) คือ ข้อความที่บอกได้ว่าเป็นจริง หรือ เท็จ อย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น เช่น โลกโคจรรอบดวงอาทิตย์ , $3 < 5$, เซตว่างมีสมาชิก เป็นต้น. ซึ่งจะอยู่ในรูปของประโยคบอกเล่าหรือปฏิเสธ

   ถ้าเป็นจริง เรียกว่า มี <u>ค่าความจริง</u> (Truth Value) <u>เป็นจริง</u> ซึ่งจะแทนด้วย T

   ถ้าเป็นเท็จ เรียกว่า มี <u>ค่าความจริง</u> (Truth Value) <u>เป็นเท็จ</u> ซึ่งจะแทนด้วย F

   ถ้าบอกไม่ได้ เช่น น้ำท่วมหรือไง. ปิดประตูซะ อย่างนี้ไม่เป็นประพจน์ ซึ่งจะอยู่ในรูปของประโยคคำถาม คำสั่ง หรือ คำห้าม ขอร้อง อ้อนวอน

2. **ตารางค่าความจริง** มี 5 ชนิด คือ เชื่อมด้วย

   และ ($\wedge$) หรือ ($\vee$) ถ้า ...แล้ว ($\rightarrow$) ก็ต่อเมื่อ ($\leftrightarrow$) ไม่ ($\sim$)

p	q	$P \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$	$\sim p$
T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T

   ถ้าประพจน์มี 3 ตัว ก็ต้องสร้างตารางค่าความจริง 2^3 กรณี หรือ 8 กรณี เช่น p, q, r

   ถ้า มี n ประพจน์ ก็ต้องสร้าง 2^n กรณี

3. **ประพจน์ที่สมมูลกัน** ถ้า ประพจน์ที่ 1 สมมูลกับ ประพจน์ที่ 2 แล้ว เขียนแทนด้วยเครื่องหมาย $\equiv$ เชื่อม เช่น $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ หมายความว่า ทุกกรณีไม่ว่าค่าความจริงของ p, q จะเป็นจริงหรือเท็จอย่างไร จะได้ค่าความจริงออกมาเหมือนกันทุกกรณี

   <u>การทดสอบว่าประพจน์ 2 ประพจน์ สมมูลกันทำได้ 2 วิธีคือ</u>

   ก. สร้างตารางแจกแจงค่าความจริง ค่าความจริงต้องตรงกันทุกกรณี

   ข. โดยการใช้หลักความจริงและประพจน์ที่สมมูลกันแบบง่าย ๆ ที่ควรจำ เพื่อแปลงว่าสามารถเขียน

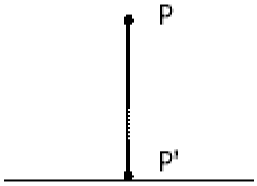
เรขาคณิต

ความรู้พื้นฐานเรขาคณิตวิเคราะห์

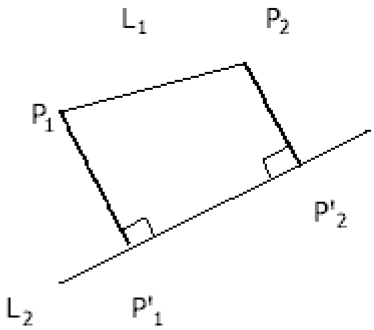
1. **โปรเจ็คชัน** (Projections) มี 2 แบบ คือ

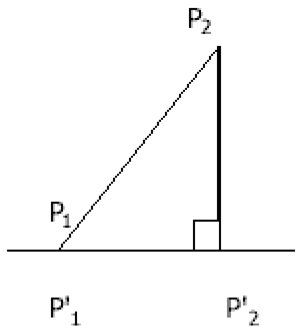
ก. โปรเจ็คชันของจุดบนเส้นตรง ข. โปรเจ็คชันของเส้นตรงบนเส้นตรง

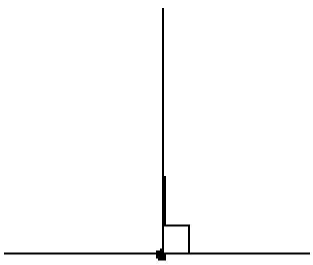
โปรเจ็คชันของจุดบนเส้นตรง จะได้เป็น จุด ดังรูป โปรเจ็คชันของจุด P บนเส้นตรง L จะได้จุด P' ซึ่งเกิดจากการลากจุด ไป ตั้งฉากกับเส้นตรง. ในกรณีที่จุดอยู่เส้นตรงก็จะได้จุด ๆ นั้นนั่นเอง เพราะลากไปไหนไม่ได้



โปรเจ็คชันของเส้นตรงบนเส้นตรง ก็จะได้เส้นตรง ยกเว้นกรณีเดียวที่เส้นที่ต้องการหาโปรเจ็คชันตั้งฉากกับอีกเส้นหนึ่งนั้น จะได้เป็นจุด ดังรูป แสดง โปรเจ็คชันของเส้น L_1 บนเส้นตรง L_2 ซึ่งก็หาได้โดยลากจุดปลายของเส้น L_1 ไปตั้งฉากบนเส้น L_2 ก็จะได้จุดปลาย 2 จุด ลากเชื่อมจุด 2 จุดซะก็จะได้ เส้น $P'_1P'_2$ เป็นโปรเจ็คชันที่ต้องการ

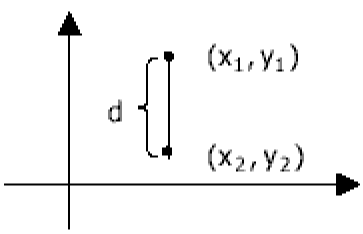




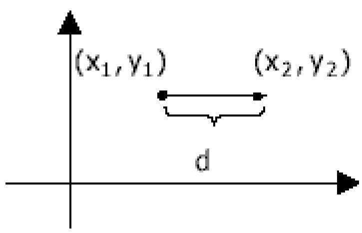


อย่างนี้ได้จุด

2. **ระยะทาง** (d) ระหว่างจุด 2 จุด (x_1, y_1) กับ (x_2, y_2)



$d = | y_1 - y_2 |$

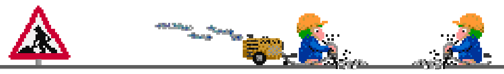


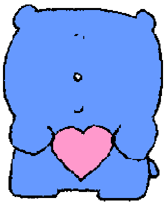
$d = | x_1 - x_2 |$

จำนวนและตัวเลข

จำนวนและตัวเลข

การเขียนตัวเลขแทนจำนวน จำนวน เป็นการเปรียบเทียบให้ทราบว่ามากกว่า น้อยกว่า หรือเท่ากัน (เพราะการเปรียบเทียบของแต่ละบุคคลไม่เหมือนกันขึ้นอยู่กับความรู้สึก) มนุษย์จึงคิดค้นสัญลักษณ์ขึ้นมา เพื่อใช้กำกับจำนวนที่เรียกว่า ตัวเลข ตัวเลข ที่มนุษย์คิดค้นขึ้นมานั้น แต่ละชาติแต่ละภาษาต่างก็คิดขึ้นมาใช้ ซึ่งตัวเลขบางแบบก็เลิกใช้แล้ว บางแบบก็ยังใช้ในปัจจุบัน บางแบบก็ใช้หรือเข้าใจกันแต่เฉพาะชาติของตนเอง ที่ถือว่าเป็นระบบตัวเลขสากลใช้กันทั่วโลก คือ "ระบบตัวเลขฮินดูอารบิก"

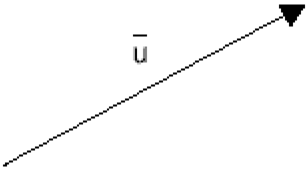




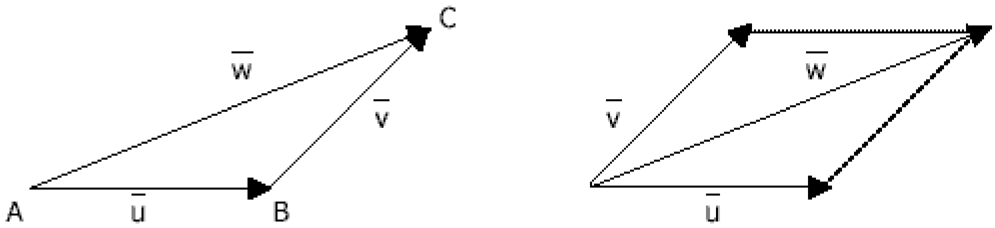
เวกเตอร์

เวกเตอร์

มีทั้งขนาดและทิศทาง



1. $\bar{u}=\bar{v}$ ก็ต่อเมื่อ ขนาดเท่ากัน $(|\bar{u}|=|\bar{v}|)$ และ ทิศทางเดียวกัน
2. $-\bar{u}$ คือ นิเสธของ $\bar{u}$ มีขนาดเท่ากับ $|\bar{u}|$ แต่ทิศทางตรงข้ามกัน
3. $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ ดังรูป หรือ $\bar{w}=\bar{u}+\bar{v}$



4. <u>เวกเตอร์ศูนย์</u> (Zero Vector) เขียนแทนด้วย $\bar{0}$ มีขนาดเท่ากับศูนย์ จุดเริ่มต้นและสิ้นสุดเป็นจุดเดียวกัน

สมบัติการบวกเวกเตอร์

ให้ $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$ เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ในระนาบ

1. ปิด $\bar{u}+\bar{v}$ ยังเป็นเวกเตอร์ในระนาบ
2. สลับที่ $\bar{u}+\bar{v}=\bar{v}+\bar{u}$
3. เปลี่ยนกลุ่ม $\bar{u}+(\bar{v}+\bar{w})=(\bar{u}+\bar{v})+\bar{w}$
4. มีเอกลักษณ์ $\bar{0}+\bar{u}=\bar{u}+\bar{0}=\bar{u}$ $\bar{0}$ เป็นเอกลักษณ์
5. มีอินเวอร์ส $-\bar{u}+\bar{u}=\bar{u}+((-\bar{u})=\bar{0}$ $-\bar{u}$ เป็นอินเวอร์สของ $\bar{u}$
6. การบวกด้วยเวกเตอร์ที่เท่ากัน $\bar{u}=\bar{v}\Rightarrow\bar{u}+\bar{w}=\bar{v}+\bar{w}$
7. การลบเวกเตอร์ ก็คือการบวกด้วยเวกเตอร์ที่ตรงกันข้ามกับเวกเตอร์ที่นำมาบวกนั่นเอง

   $\bar{u}-\bar{v}=\bar{u}+(-\bar{v})$

เซต

ความสัมพันธ์

1. **ผลคูณคาร์ทีเซียน** ของเซต A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$ คือ เซตของคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมด โดยที่ $a \in A$ และ $b \in B$
   ถ้า เซต A มีจำนวนสมาชิก m ตัว. และ เซต B มีจำนวนสมาชิก n ตัว.
   แล้ว $A \times B$ จะมีจำนวนสมาชิกเท่ากับ mn ตัว
2. **ความสัมพันธ์** r คือ เซตของคู่อันดับ (a, b) โดยที่ถ้า $r \subset A \times B$ แล้วเรียกว่า r <u>เป็นความสัมพันธ์จาก</u> A <u>ไป</u> B หรือถ้า $r \subset A \times A$ จะเรียกว่า r <u>เป็นความสัมพันธ์ใน</u> A
   ถ้า เซต A มีจำนวนสมาชิก m ตัว. และ เซต B มีจำนวนสมาชิก n ตัว. และ $r \subset A \times B$ แล้ว จะมี r ได้ทั้งหมด r^{mn} แบบ.
3. **โดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์**

นิยาม	ถ้ากำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์
	โดเมนของ r คือ เซตของสมาชิก ตัวหน้า ของคู่อันดับ ใน r เขียนแทนด้วย D_r
	เรนจ์ ของ r คือ เซตของสมาชิก ตัวหลัง ของคู่อันดับ ใน r เขียนแทนด้วย R_r

จากนิยามเราอาจเขียนสั้น ๆ ว่า $D_r = \{x \mid (x, y) \in R\}$

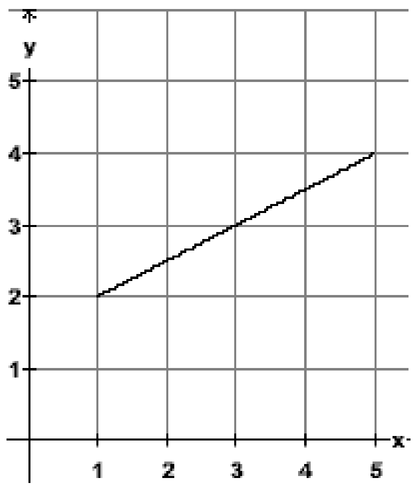
$$R_r = \{y \mid (x, y) \in R\}$$

<u>**ตัวอย่าง**</u> ถ้ากำหนดให้ $r = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r

<u>**วิธีทำ**</u> สมาชิกตัวหน้าของ r คือ 1, 2 และ 3 ดังนั้น โดเมน $(D_r) = \{1, 2, 3\}$ <u>Ans</u>

สมาชิกตัวหลังของ r คือ a, b และ c ดังนั้น เรนจ์ $(R_r) = \{a, b, c\}$ <u>Ans</u>

<u>**ตัวอย่าง**</u> พิจารณากราฟของความสัมพันธ์ r ดังรูป จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r



<u>**วิธีทำ**</u> จากรูปจะเห็นว่าคู่อันดับ (x, y) ของ r ต่อเนื่องกัน

เมื่อพิจารณาค่าของ x จะพบว่ามีค่าตั้งแต่ 1 ถึง 5 หรือ $1 \le x \le 5$

ซึ่งก็คือค่าของ D_r นั่นเอง $\therefore D_r = \{x \in R \mid 1 \le x \le 5\}$ หรือ $D_r = [1, 5]$ <u>Ans</u>

เมื่อพิจารณาค่าของ y จะพบว่ามีค่าตั้งแต่ 2 ถึง 4 หรือ $2 \le y \le 4$

จำนวนจริง

จำนวนจริง (Real Number)

สามารถที่จะแบ่งจำนวนจริงออกได้ ดังแผนภาพต่อไปนี้

- จำนวนจริง
  - จำนวนตรรกยะ
    - จำนวนเต็ม
      - เต็มบวก
      - เต็มลบ
      - เต็มศูนย์
    - จำนวนที่เขียนในรูป $\frac{a}{b}$, $(a, b \in I)$ $b \neq 0$
  - จำนวนอตรรกยะ

การเท่ากันของ R

ถ้า $a, b, c \in R$ ใด ๆ

สมบัติสะท้อน	$a = a$
สมบัติสมมาตร	ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$
การถ่ายทอด	ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$
การบวกด้วยจำนวนที่เท่ากัน	ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
การคูณด้วยจำนวนที่เท่ากัน	ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$

สมบัติของ R

ปิดการบวก	$a + b \in R$
ปิดการคูณ	$ab \in R$
การสลับที่การบวก	$a + b = b + a$
การสลับที่การคูณ	$ab = ba$
การเปลี่ยนกลุ่มการบวก	$(a + b) + c = a + (b + c)$
การเปลี่ยนกลุ่มการคูณ	$(ab)c = a(bc)$
การมีเอกลักษณ์การบวก	$0 + a = a + 0 = 0$ เรียก 0 ว่า <u>เอกลักษณ์การบวก</u>
การมีเอกลักษณ์การคูณ	$1 \times a = a \times 1 = a$ เรียก 1 ว่า <u>เอกลักษณ์การคูณ</u>
การมีอินเวอร์สการบวก	ให้ $a \in R$ ใด ๆ แล้ว จะมี $-a \in R$ โดยที่ $a + (-a) = (-a) + a = 0$ เรียก $-a$ ว่า <u>อินเวอร์สการบวก</u>ของ a
การมีอินเวอร์สการคูณ	ให้ $a \in R$ ใด ๆ ซึ่ง $a \neq 0$ แล้ว จะมี $a^{-1} \in R$ โดยที่ $a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$ เรียก a^{-1} ว่า <u>อินเวอร์สการคูณ</u>ของ a
การแจกแจง	$a(b + c) = ab + ac$

<u>ต.ย.</u> กำหนดให้ $a * b = a + b - 2$ จงหาเอกลักษณ์สำหรับโอเปอเรชันของ * นี้ และจงหาอินเวอร์สของ 3 สำหรับโอเปอเรชัน * นี้ด้วย

<u>วิธีทำ</u> ให้ I แทนเอกลักษณ์สำหรับโอเปอเรชันนี้ และ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

แสดงว่า $a * I = I * a = a$

แต่ $a * I = I * a = a + I - 2$

$\therefore \quad a + I - 2 = a \qquad \therefore\ I = 2$

สถิติ

ติ

1

1 **พิสัย** = ค่าสูงสุด – ค่าต่ำสุด (ข้อมูลดิบ) ชั้นสูงสุด – ขอบล่างชั้นต่ำสุด (แจกแจง)

$\dfrac{\text{พิสัย}}{\text{นวนชั้น}}$

2 **ขอบล่าง** = ต่ำสุด + สูงสุดของชั้นต่ำกว่ บบแจกแจงความถี่) แทนด้วย L

ขอบบน = สูงสุด + ต่ำสุดของชั้นที่สูงกว่า 1 ชั้น (แบบแจกแจงความถี่) แทนด้วย U

3 **ความกว้างของอันตรภาคชั้น I** = ขอบบน – ขอบล่าง (ของชั้นนั้น ๆ) = สูงสุด – ต่ำสุด + 1

4 **ค่ากลางในอันตรภาคชั้นใด** $x_i = \dfrac{U+L}{2} = \dfrac{\text{ต่ำสุด} + \text{สูงสุด}}{2}$

5 **ความถี่สัมพัทธ์ชั้นใด** = $\dfrac{\text{ความถี่ชั้นนั้น}}{\text{จำนวนข้อมูลทั้งหมด}}$

6 **ค่ากลางข้อมูล**

6.1 **ค่าเฉลี่ยเลขคณิต** $(\overline{X})$

$$\overline{X} = \underbrace{\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{N}}_{\text{ยังไม่แจกแจง}} = \underbrace{\frac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 + \ldots + w_nx_n}{N}}_{\text{ถ่วงน้ำหนัก}}$$

$$= \underbrace{\frac{f_1x_1 + f_2x_2 + f_3x_3 + \ldots + f_nx_n}{N}}_{\text{แจกแจงแล้ว}} = a + I\overline{D}, D_i = \frac{x_i - a}{I}$$

a คือ ค่ากลางของข้อมูลชั้นที่เลือก

<u>สมบัติ</u>

1. $\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{X}) = 0$ และ $\sum_{i=1}^{N}(x_i - M)^2$ มีค่าน้อยสุดเมื่อ $M = \overline{X}$ และ
2. ถ้า $y_i = ax_i + b \rightarrow \overline{y} = a\overline{x} + b$

6.2 **มัธยฐาน** ย่อ Me ตำแหน่ง = $\dfrac{N+1}{2}$ ถ้ายังไม่แจกแจง และ $\dfrac{N}{2}$ ถ้าแจกแจงแล้ว

$$Me = \frac{L + \left(\frac{N}{2} - \sum f_L\right)I}{f_{Me}}$$

I แบบแจกแจงความถี่แล้วของชั้นที่มี Me

L = ขอบล่างของชั้นที่มี Me อยู่

$\sum f_L$ = ผลบวกของความถี่ของชั้นที่ต่ำกว่าชั้นที่มี Me อยู่

f_{Me} = ความถี่ของชั้นที่ Me อยู่

<u>สมบัติ</u> $\sum_{i=1}^{N}|x_i - a|$ มีค่าน้อยสุด เมื่อ $a = Me$

6.3 **ฐานนิยม** ย่อ Mo ค่าที่มีความถี่สูงสุด

ถ้า I แต่ละชั้นไม่เท่ากัน หาได้จากชั้นใดที่ $\dfrac{f_i}{x_i} = Max$ แล้ว Mo จะอยู่ชั้นนั้น

$$Mo = L + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right)I$$

I แบบแจกแจงความถี่แล้วของชั้นที่มี Mo

L = ขอบล่างของชั้นที่มี Mo อยู่

ความน่าจะเป็น

ทฤษฎีเบื้องต้นของความน่าจะเป็น

1. **การทดลองสุ่ม** คือ การทดลองซึ่งทราบว่า ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น อาจเป็นอะไรได้บ้าง แต่ไม่สามารถบอกได้ถูกต้องว่า ในแต่ละครั้งที่ทดลอง จะเกิดผลลัพธ์เป็นอะไร
2. **แซมเปิลสเปซ** (Sample Space) คือ เซต ที่มีสมาชิกเป็นผลลัพธ์ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่ม
3. **เหตุการณ์** (Event) คือ สับเซตของแซมเปิลสเปซ เป็นสิ่งที่เราสนใจว่าจะเกิดอะไร

   แซมเปิลสเปซและ ϕ เป็นเหตุการณ์

   ตัวอย่าง. การโยนลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง

   เป็นการทดลองสุ่ม เพราะทราบว่าผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นอาจเป็นเลข 1 ถึง 6

   แซมเปิลสเปซ คือ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   เหตุการณ์ ที่เราสนใจ เช่น โยนแล้วได้แต้มคู่ $E = \{2, 4, 6\}$ เป็นต้น.
4. **ยูเนียนและอินเตอร์เซกชั่นข**องเหตุการณ์ ของเหตุการณ์ E_1 และ E_2 ตามลำดับคือ

   $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$
5. **เหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน**

   ถ้า $E_1 \cap E_2 = \phi$ แล้วจะเรียก E_1 และ E_2 ว่าเป็น <u>เหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน</u>

   เช่น E_1 เป็นเหตุการณ์ที่ โยนลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้ง แล้วได้แต้มคู่

   E_2 เป็นเหตุการณ์ที่ โยนลูกเต๋า 1 ลูก 1 ครั้งแล้วได้แต้มคี่
6. **คอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์** ให้ $E \subset S$ โดยที่ S เป็นแซมเปิลสเปซ และ E เป็นเหตุการณ์

   E' จะแทนคอมพลีเมนต์ของเหตุการณ์ E ซึ่งมีสมาชิกที่ไม่อยู่ใน E แต่อยู่ใน S
7. **ความน่าจะเป็น**

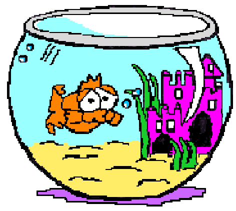
ถ้าการทดลองอย่างสุ่มหนึ่ง มีสมาชิกของ แซมเปิลสเปซ เป็นจำนวนเท่ากับ N
และ จำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ E ที่เราสนใจ มีค่าเท่ากับ n
โดยที่แต่ละสมาชิกของแซมเปิลสเปซนั้น **มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่า ๆ กัน**
ความน่าจะเป็นของ การเกิดเหตุการณ์ E เขียนแทนด้วย P(E) จะมีค่าเท่ากับ $\frac{n}{N}$ หรือ $P(E) = \frac{n}{N}$

*** กรณีของแซมเปิลสเปซที่เป็นเซตอนันต์ ไม่กล่าวถึงในระดับนี้ ***

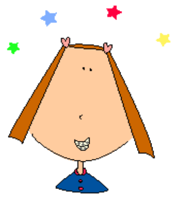
กฎความน่าจะเป็น (เหมือนเรื่องเซต)

1. $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) \cup P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
2. $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) \cup P(E_2)$ ถ้า E_1 และ E_2 เป็นเหตุการณที่ไม่เกิดร่วมกัน
3. $P(E') = 1 - P(E)$
4. $0 \le P(E) \le 1$

ฟังก์ชันควอดราติกและสมการควอดราติก



ฟังก์ชัน



1. **ฟังก์ชัน** คือ ความสัมพันธ์ที่โดเมนไม่ซ้ำ

2. **การพิจารณาว่าความสัมพันธ์ ที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหรือไม่**

   2.1 ถ้าเขียนแบบแจกแจงสมาชิกได้ ดูตามนิยามคือ โดเมนทุกตัวห้ามซ้ำ เช่น มี $(2,5),(2,1)$ ไม่ได้

   2.2 ถ้า เขียนเป็นสมการมา เช่น $y=3x+1$ ทดสอบโดยหลัก คือ

   ให้ $(x,y)\in r$ และ $(x,z)\in r$ ถ้าสรุปได้ว่า $y=z$ แล้ว จะได้ว่า r เป็นฟังก์ชัน

   แต่ถ้ามีเพียงกรณีเดียวก็พอ ที่ $y\neq z$ หรือสรุปไม่ได้ว่า $y=z$ จะได้ว่า r ไม่เป็นฟังก์ชัน

   2.3 ถ้าวาดกราฟได้ หรือรู้กราฟ ให้ลากเส้นตรงขนานกับ แกน Y จะต้องตัดกราฟเพียงจุดเดียวเท่านั้น จึงจะเป็นฟังก์ชัน

3. **ชนิดของฟังก์ชัน** ถ้าความสัมพันธ์ $r\subset A\times B$ และความสัมพันธ์นี้เป็นฟังก์ชัน เราจะเรียกว่า r เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B (function from A into B) และเขียนแทนด้วย $f:A\to B$ โดยที่ $D_f=A$ และ $R_f\subset B$

   เราจะแบ่งชนิดของฟังก์ชันออกได้ดังนี้

   3.1 ฟังก์ชันจาก A ไป B หรือ $f:A\to B$ — $D_f=A,\ R_f\subset B$

   3.2 ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B (function from A onto B) — $D_f=A,\ R_f=B$

   3.3 ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไป B หรือ $f:A\xrightarrow{1-1}B$ — $D_f=A,\ R_f\subset B$

   3.4 ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B หรือ $f:A\underset{\text{ทั่วถึง}}{\xrightarrow{1-1}}B$ — $D_f=A,\ R_f=B$

   3.5 ฟังก์ชันระหว่าง A กับ B — $D_f\subset A, R_f\subset B$

4. **การพิจารณาว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่**

   4.1 ใช้หลักว่า ถ้า $f(x_1)=f(x_2)$ แล้วสรุปได้ว่า $x_1=x_2$ จึงจะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

   4.2 วาดกราฟ แล้วลากเส้นขนานกับแกน X ต้องตัดกราฟ 1 จุดเท่านั้น จึงจะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

เมตริกซ์ 

เมตริกซ์

1. สัญลักษณ์

$$A=\begin{array}{cl} \begin{array}{ccc}\text{หลักที่1} & \text{หลักที่2} & \text{หลักที่3}\end{array} & \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix} & \begin{array}{l}\text{แถวที่1}\\ \text{แถวที่2}\end{array}\end{array}$$

เขียน**ชื่อเมตริกซ์** ด้วยตัวใหญ่ เช่น A, B, C (เหมือนเซต)

a_{ij} = สมาชิกของเมตริกซ์ แถวที่ i หลักที่ j

มิติของเมตริกซ์ = จำนวนแถว x จำนวนหลัก เช่น จากตัวอย่าง เมตริกซ์ A มีมิติเป็น 2 x 3

2. ทรานโพสของเมตริกซ์

ถ้า A เป็นเมตริกซ์ ที่มีมิติเป็น $m\times n$ แล้ว A^t = ทรานโพสของ A (Transpose of A) จะมีมิติเป็น $n\times m$ เช่น

$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 0\\ 5 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ 3 & 0 & 4\end{bmatrix}$ จะเห็นว่า A มีมิติเป็น 3×2 และ A^t มีมิติเป็น 2×3

3. การเท่ากันของเมตริกซ์

ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์

$A=B$ ก็ต่อเมื่อ

1. มีมิติเท่ากัน
2. สมาชิกเปรียบเทียบตัวต่อตัวเท่ากัน

เช่น $\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+1 & 5-2\end{bmatrix}$

ถ้า $\begin{bmatrix}1 & 2\\ x & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}\Leftrightarrow x=4$

$\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ $\because$ มิติไม่เท่ากันก็พอแล้วที่จะสรุป

4. การบวกกันของเมตริกซ์

ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์ $\Rightarrow A+B$ จะบวกกันได้ $\Leftrightarrow A, B$ มีมิติเท่ากัน

และ การบวกกันทำได้โดย จับสมาชิกที่อยู่ตำแหน่งเดียวกันมาบวกกัน

เช่น $\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+(-3) & 2+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 6\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}=?$. บวกกันไม่ได้ เพราะมิติไม่เท่ากัน

หมายเหตุ การลบกันก็ทำนองเดียวกัน

5. การคูณเมตริกซ์ด้วยจำนวนจริง

ถ้า A เป็นเมตริกซ์ใด ๆ และ c เป็นเมตริกซ์ แล้ว cA คือ การคูณเมตริกซ์ A ด้วยจำนวนจริง c โดยที่ นำ c ไปคูณกับทุก ๆ ตัวของสมาชิกในเมตริกซ์ A

เช่น $A=\begin{bmatrix}4 & 5\end{bmatrix}\Rightarrow 3A=\begin{bmatrix}3\times 4 & 3\times 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 15\end{bmatrix}$

6. การคูณเมตริกซ์ด้วยเมตริกซ์

ถ้า A และ B เป็นเมตริกซ์

AB หมายถึง การนำเมตริกซ์ A มาคูณกับเมตริกซ์ B ทางด้านซ้ายมือของเมตริกซ์ B

หรือ การนำเมตริกซ์ B มาคูณกับเมตริกซ์ A ทางด้านขวามือของเมตริกซ์ A

ภาคตัดกรวย

ทำไมจึงเรียกว่า " ภาคตัดกรวย "

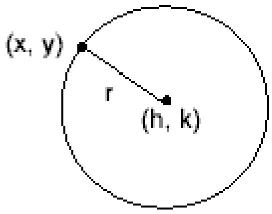
เนื่องจากกราฟ 4 รูป แบบ ต่อไปนี้ คือ วงกลม, พาราโบลา, วงรี และ ไฮเปอร์โบลา เกิดจากการตัดกรวย 2 รูปที่เชื่อมต่อกันด้วยจุดยอดของกรวยทั้งสอง ด้วยระนาบหนึ่ง

1. วงกลม

นิยาม วงกลม คือ เซตของ**ทางเดิน**จุด (x, y) ใด ๆ บนระนาบหนึ่ง โดยมีระยะทางจากจุด (x, y) ใด ๆ นั้นกับจุดคงที่จุดหนึ่ง (จุดศูนย์กลางของวงกลม) มีค่าคงที่

ระยะทางจากจุด (x, y) ใด ๆ กับจุดศูนย์กลางของวงกลมก็คือรัศมี (r) นั่นเอง

ดังนั้น ถ้าให้จุดศูนย์กลางของวงกลม แทนด้วยจุด (h, k) ดังรูป



$\because$ ในเรื่องเส้นตรงเราทราบว่าระยะทาง (d) ระหว่างจุด 2 จุด คือ (x_1, y_1) กับ (x_2, y_2) มีค่าดังนี้

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$\therefore$ แทนค่า $d = r$ และ (x_1, y_1) ด้วย (x, y) ใด ๆ และ (x_2, y_2) ด้วย (h, k) จะได้

$$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$$

เมื่อยกกำลังสองทั้งสองข้างจะได้ว่า

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$

หรือ $$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

ซึ่งเราจะเรียกสมการดังกล่าวว่า " **สมการวงกลมรูปแบบมาตรฐาน** "

ถ้าเรากระจายสมการ วงกลมรูปแบบมาตรฐาน ออก จะได้ว่า

$$(x^2 - 2hx + h^2) + (y^2 - 2ky + k^2) = r^2$$

หรือ $$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

ถ้ากำหนดให้ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ เป็น" **สมการวงกลมรูปแบบทั่วไป** "

โดยที่ A, B และ C เป็นตัวเลขใด ๆ $\therefore$ เมื่อทำการเทียบสัมประสิทธิ์ ตัวต่อตัวระหว่าง

$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$ กับ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ จะได้ว่า

$-2h = A$ และ $-2k = B$ และ $h^2 + k^2 - r^2 = C$ ตามลำดับ

หรือ $h = -\dfrac{A}{2}$ และ $k = -\dfrac{B}{2}$

เมื่อแทนค่า $h = -\dfrac{A}{2}$ และ $k = -\dfrac{B}{2}$ ลงใน $h^2 + k^2 - r^2 = C$ จะได้ดังนี้

$$(-\frac{A}{2})^2 + (-\frac{B}{2})^2 - r^2 = C$$

$$\frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - r^2 = C$$

$$r^2 = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} - C = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4}$$

จำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อน (Complex Number)

$z = a + bi = (a,b)$

ถ้า $a, b \neq 0$ เรียก จำนวนจินตภาพ

ถ้า $a = 0$ เรียก จำนวนจินตภาพแท้

ถ้า $b = 0$ เรียก จำนวนจริง

$(a,b)(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$

$i = \sqrt{-1}, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1$

$R \subset C$

สมบัติ

ให้ z_1, z_2, z_3 เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน

สมบัติ	การบวก	การคูณ
1. ปิด	$z_1 + z_2 \in C$	$z_1 z_2 \in C$
2. เปลี่ยนกลุ่ม	$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$	$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$
3. สลับที่	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	$z_1 z_2 = z_2 z_1$
4. มีเอกลักษณ์	$(0,0) + (a,b) = (a,b)$	$(1,0)(a,b) = (a,b)$
5. มีอินเวอร์ส	$(a,b) + (-a,-b) = (0,0)$	$(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2}) = (1,0)$
6. แจกแจง	$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$	

การหาร

$$\frac{(a,b)}{(c,d)} = (a,b)(\frac{c}{c^2+d^2}, -\frac{d}{c^2+d^2}) \ ; (c,d) \neq (0,0)$$

$$\frac{(a,b)}{(c,d)} = (\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2})$$

สังยุค (Conjugate)

$a + bi$ สังยุค คือ $a - bi$

$(a + bi) + (a - bi) = 2a$ $\qquad (a + bi) - (a - bi) = 2bi$

สมบัติ

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
4. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} . \overline{z_2}$
5. $\overline{z_1 + z_2 + ... z_n} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + ... + \overline{z_n}$
6. $\overline{z_1 - z_2 - ... z_n} = \overline{z_1} - \overline{z_2} - ... - \overline{z_n}$
7. $\overline{z_1 z_2 ... z_n} = \overline{z_1} . \overline{z_2} ...... \overline{z_n}$
8. $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$
9. $z = \overline{z}$ เมื่อ $b = 0$
10. $z = -\overline{z}$ เมื่อ $a = 0$
11. ส่วนจริง $R(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}$
12. ส่วนจินตภาพ $I(z) = \frac{z - \overline{z}}{2i}$
13. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
14. $z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2 = 2R(z_1 \overline{z_2})$

เรียงสับเปลี่ยน

วิธีเรียงสับเปลี่ยนและวิธีจัดหมู่

1. กฎเกณฑ์เบื้องต้นเกี่ยวกับการนับ

ข้อที่ 1 ถ้าต้องการทำงาน 2 อย่าง โดยที่งานอย่างที่หนึ่ง ทำได้ n_1 วิธี และ ในแต่ละวิธีที่ทำงานอย่างแรกนี้ จะมีวิธีที่จะทำงานอย่างที่สอง ได้ n_2 วิธี แล้ว จำนวนวิธีที่จะเลือกทำงานทั้งสองอย่างจะทำได้ทั้งหมด เท่ากับ n_1n_2 วิธี

ข้อที่ 2 ขยายมาจาก ข้อที่ 1 คือ งานมีทั้งหมด k อย่าง วิธีที่จะทำงานทั้งหมด เท่ากับ $n_1n_2n_3...n_k$ วิธี

หมายเหตุ งานที่ทำต่อเนื่องกันในแต่ละขั้นจะนำมาคูณกัน แต่ถ้างานขั้นใดต้องแบ่งเป็นกรณี ๆ วิธีการงานในขั้นนั้น ๆ จะต้องนำแต่ละกรณีมาบวกกัน

<u>ต.ย.</u> ถ้างานชิ้นหนึ่งมี 3 ขั้น ต่อเนื่องกัน

ขั้นที่ 1. ทำได้ x วิธี.

ขั้นที่ 2. แบ่งเป็น 3 กรณี

กรณีที่ 1. ทำได้ y_1 วิธี

กรณีที่ 2. ทำได้ y_2 วิธี

กรณีที่ 3. ทำได้ y_3 วิธี

ขั้นที่ 3 ทำได้ z วิธี.

จะได้ว่าวิธีการทำงานทั้งหมดจะมีจำนวนเท่ากับ $(x)(y_1+y_2+y_3)(z)$ วิธี.

<u>ต.ย.</u> ในการเลือกพนักงานเข้าทำงาน<u>ตำแหน่งที่ต่างกัน</u> จำนวน 5 คน. ถ้าต้องการชาย 2 คน. หญิง 3 คน. ถ้ามีผู้สมัครชาย 4 คน. และผู้สมัครหญิง 5 คน. จงหาว่าจะมีวิธีการเลือกได้กี่วิธี. (<u>ถ้าถือว่า แต่ละคนมีความสามารถในการทำงานแต่ละตำแหน่งได้ทุกตำแหน่ง</u>)

1. ไม่มีเงื่อนไขใดเพิ่มเติม

2. ต้องการผู้หญิงอย่างน้อย 2 คน. ส่วนที่เหลืออีก 3 คน.จะเป็นชายหรือหญิงก็ได้

<u>วิธีทำ</u> 1. งานมีทั้งสิ้น 5 ขั้นตอน คือ

<u>ขั้นที่ 1.</u> เลือกชาย 1 คน จาก ชาย 4 คน ทำได้ 4 วิธี

<u>ขั้นที่ 2.</u> เลือกชาย 1 คน จาก ชาย 3 คน ทำได้ 3 วิธี

<u>ขั้นที่ 3.</u> เลือกหญิง 1 คน จาก หญิง 5 คน ทำได้ 5 วิธี

<u>ขั้นที่ 4.</u> เลือกหญิง 1 คน จาก หญิง 4 คน ทำได้ 4 วิธี

<u>ขั้นที่ 5.</u> เลือกหญิง 1 คน จาก หญิง 3 คน ทำได้ 3 วิธี

โดยหลักการนับ จะได้ว่า ทำได้ทั้งหมด 4 x 3 x 5 x 4 x 3 วิธี

2. งานมีทั้งสิ้น 3 ขั้นตอน คือ

<u>ขั้นที่ 1.</u> เลือกหญิง 1 คน จาก หญิง 5 คน ทำได้ 5 วิธี

<u>ขั้นที่ 2.</u> เลือกหญิง 1 คน จาก หญิง 4 คน ทำได้ 4 วิธี

<u>ขั้นที่ 3.</u> มี 4 กรณี คือ

<u>กรณีที่ 1.</u> เลือก ชายล้วน 3 คน.

ขั้นที่ 1 เลือกชาย 1 คน จาก ชาย 4 คน ทำได้ 4 วิธี

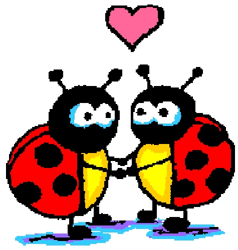
ขั้นที่ 2 เลือกชาย 1 คน จาก ชาย 3 คน ทำได้ 3 วิธี

ขั้นที่ 3 เลือกชาย 1 คน จาก ชาย 2 คน ทำได้ 2 วิธี

<u>กรณีที่ 2.</u> เลือก ชาย 2 หญิง 1

ขั้นที่ 1 เลือกชาย 1 คน จาก ชาย 4 คน ทำได้ 4 วิธี

การอินทิเกรต



การอินทิเกรต

1. ถ้า $F'(x)$ เป็นอนุพันธ์ของ $f(x)$ แล้ว $\int f(x)\,dx = \int F'(x)dx = F(x) + c$ และเรียกว่า **การอินทิเกรต**

   $\int$ เรียกว่า เครื่องหมาย อินทิกรัล , $f(x)$ เรียกว่า **ตัวถูกอินทิเกรต** ,

   dx บอกว่าเป็นการอินทิเกรตเทียบกับตัวแปร x

2. **สูตร หาอินทิเกรต**

   ถ้า u เป็นพจน์ทั่วไป

   2.1 $\int du = u + c$

   2.2 $\int k\,du = k\int du = ku + c$

   2.3 $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$

   2.4 $\int (du \pm dv) = \int du \pm \int dv$

3. **อินทิกรัลจำกัดเขต** ถ้า f, F เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ โดยที่ $F'(x) = f(x)$ แล้ว

   $$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

4. **พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง** ของ $y = f(x)$ บนช่วง $[a,b]$ โดยที่ f ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ แล้ว

   $\int_a^b f(x)\,dx$ คือ พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้งของกราฟ f จาก $x = a$ ถึง $x = b$ โดยที่

   ถ้า $f(x) \ge 0$ บนช่วง $[a,b]$ จะได้ พื้นที่ (A) มีค่าออกมาเครื่องหมายเป็นบวก

   ถ้า $f(x) \le 0$ บนช่วง $[a,b]$ จะได้ พื้นที่ (A) มีค่าออกมาเครื่องหมายเป็นลบ

5. **ฟังก์ชันคู่ ฟังก์ชันคี่** ในแง่ของการอินทิเกรตเราตรวจสอบฟังก์ชัน $f(x)$ ได้ดังนี้

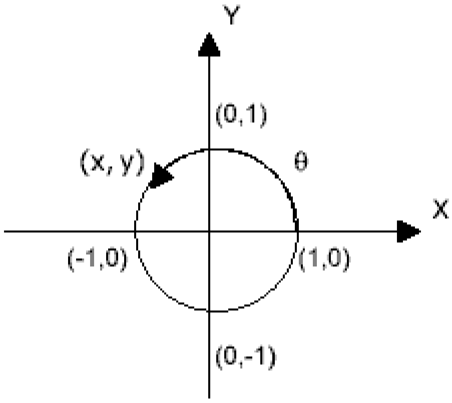
   $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่ ก็ต่อเมื่อ $\int_{x=-a}^{x=a} f(x)\,dx = 2\int_{x=0}^{x=a} f(x)\,dx$ เมื่อ $a \in R$

   $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคี่ ก็ต่อเมื่อ $\int_{x=-a}^{x=a} f(x)\,dx = 0$ เมื่อ $a \in R$

ตรีโกณมิติ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

1. **วงกลมหนึ่งหน่วย** คือวงกลมที่มีรัศมี 1 หน่วย

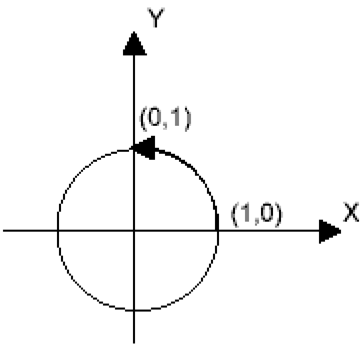


เส้นรอบวงของวงกลม 1 หน่วย มีค่าเท่ากับ $2\pi r = 2\pi(1) = 2\pi$

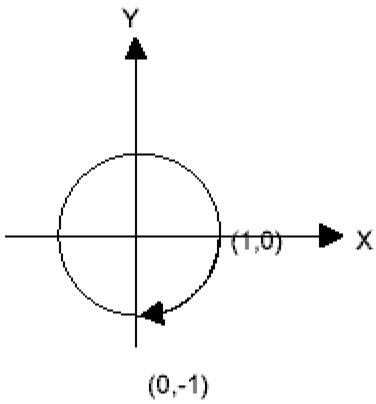
ถ้ากำหนดให้ จำนวนจริง θ คือความยาวของส่วนโค้งที่วัดจากจุด (1,0) ไปบนส่วนโค้งของวงกลม 1 หน่วย.

ในทิศทางที่กำหนดดังนี้

ถ้า วัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา แล้ว $\theta > 0$
ถ้า วัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา แล้ว $\theta < 0$



เช่นดังรูป θ ไปตกที่จุด (0, 1) จะมีความยาวของส่วนโค้งเท่ากับ $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ หรือ $\theta = \frac{\pi}{2}$ นั่นเอง



แต่ถ้าเป็นอย่างรูปนี้ $\theta = -\frac{\pi}{2}$ เพราะทิศตามเข็ม และไปตกที่จุด (0,-1)

ถ้าหมุน θ เกิน 1 รอบ เช่น จากจุด (1,0) ไปทิศทวนเข็ม ก็จะกลับมาตกที่ จุด (1,0) เหมือนเดิม ซึ่งตอนนี้ $\theta = 2\pi$

จากนั้นก็หมุนต่อไปอีก จนถึงจุด (0,1) ก็จะได้ยาวอีก $\frac{\pi}{2}$ ซึ่งสรุป $\theta = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$

ลำดับและอนุกรม

ลำดับและอนุกรม (Sequence and Series)

1. **ลำดับ** คือ ฟังก์ชัน ที่มีโดเมนเป็น เซตจำนวนเต็มบวก
   ถ้า โดเมน มีจำนวนจำกัด คือ $1, 2, 3, \ldots, n$ เรียกว่า ลำดับจำกัด
   ถ้า โดเมน มีจำนวนไม่จำกัด คือ $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots..$ เรียกว่า ลำดับอนันต์
2. โดยทั่วไปจะเขียนสัญลักษณ์ $a_1, a_2, a_3, \ldots., a_n$ ซึ่ง หมายถึง พจน์ที่ 1, พจน์ที่ 2, พจน์ที่ 3, …, พจน์ที่ n ตามลำดับ
3. **ลำดับเลขคณิต** (Arithmetic Sequence or Arithmetic Progression) ย่อด้วย A.P. หรือ A.S คือ ลำดับที่มีผลต่างร่วม(common difference ตัวย่อ d) ระหว่าง พจน์ที่ n กับ พจน์ที่ $n+1$ มีค่าคงที่
   นั่นคือ $a_{n+1} - a_n = d$ หรือ $a_{n+1} = a_n + d$
   $\therefore$ เราจะได้ว่า
   $a_2 - a_1 = d \quad (1)$
   $a_3 - a_2 = d \quad (2)$
   $a_4 - a_3 = d \quad (3)$
   …….
   $a_{n-1} - a_{n-2} = d \quad (n-2)$
   $a_n - a_{n-1} = d \quad (n-1)$
   เมื่อจับสมการ $(1) + (2) + (3) + \ldots. + (n-2) + (n-1)$ (มี $n-1$ สมการ) จะได้ว่า
   $$a_n - a_1 = (n-1)d$$
   หรือ
   $$a_n = a_1 + (n-1)d$$
4. **พจน์ทั่วไปของ ลำดับเลขคณิต** $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ในรูปของ a_1 และ d คือ
   $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \ldots.., a_1 + (n-1)d$ ซึ่งเกิดจากการแทนค่า $n = 1, 2, 3, \ldots., n$
5. **ในกรณีที่ทราบว่า ลำดับเลขคณิตจำกัดชุดหนึ่ง มีจำนวนพจน์ เป็นเลขคี่** ควรที่จะสมมุติ พจน์ทั่วไปดังนี้ คือ $\ldots., a-2d, a-d, a, a+d, a+2d, \ldots.$
   โดยเริ่มจาก ตรงกลาง คือ a แล้วขยายไป ทั้งข้างหน้าและข้างหลังทีละ d
   จุดประสงค์ ที่สมมุติแบบนี้ก็เพื่อ ให้หาค่าต่าง ๆ ได้ง่าย เช่น
   สมมุติว่า ลำดับ A.S. ชุดหนึ่ง มี 5 พจน์ และ ผลบวกของทุกพจน์ เท่ากับ 30 ถ้าผลต่างร่วมมีค่าเท่ากับ 3 จงหาลำดับชุดนี้
   วิธีทำ วิธีที่ 1 สมมุติลำดับตามที่แนะนำ คือเป็น $a-2d, a-d, a, a+d, a+2d$
   จะได้ว่า $(a-2d) + (a-d) + a + (a+d) + (a+2d) = 5a = 30$
   $\therefore a = 6$ ดังนั้นลำดับชุดนี้คือ $6-2(3), 6-3, 6, 6+(3), 6+2(3)$
   หรือ คือ 0, 3, 6, 9, 12 Ans

   วิธีที่ 2 ใช้ตามแบบเดิมที่เขียนไว้ตอนแรก คือ เป็น
   $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d$
   จะได้ว่า $a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) = 5a_1 + 10d = 30$
   แต่เรารู้ว่า $d = 3$ ดังนั้น $5a_1 = 30 - 10d = 30 - 10(3) = 0 \Rightarrow a_1 = 0$
   ก็จะได้คำตอบแบบเดียวกัน
6. **ในกรณีที่ทราบว่า ลำดับเลขคณิตจำกัดชุดหนึ่ง มีจำนวนพจน์ เป็นเลขคู่** ควรที่จะสมมุติ พจน์ทั่วไปดังนี้ คือ $.., a-3d, a-d, a+d, a+3d, \ldots$
   โดยเริ่มจาก ตรงกลาง คือ a แล้วขยายไป ทั้งข้างหน้าและข้างหลังทีละ 2d