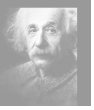
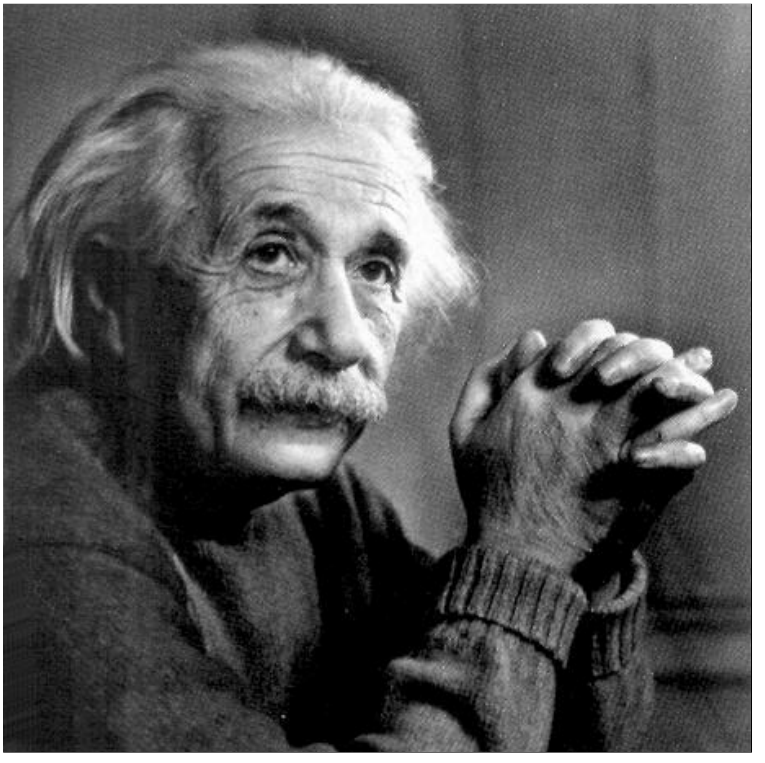


7

เปิดโปงที่มาของสุดยอดสมการ

$E = mc^2$



งานยักษ์ APEC 2003 จบไปได้ไม่นาน ก็มีข่าวใหญ่ดังกระหึ่มขึ้นอีกว่า รัฐบาลนี้เขาจะไป 'สร้างบ้านแปลงเมือง' นครใหม่ไฮเทคที่ อ.บ้านนา จ.นครนายก นิดกับหน่อยซึ่งอยู่ในเมืองใหญ่อย่างกรุงเทพฯมานานจนคุ้นเคยกับรถติดมาตั้งแต่เด็กก็เลยอดตื่นเต้นไม่ได้ พอเจอพี่เอกอีกครั้งก็เลยอยากรู้ว่าพี่เอกคิดยังไงเกี่ยวกับเรื่องเมืองใหม่ตามประสาเด็กไทยพันธุ์ใหม่ที่ (ผู้ใหญ่เขาอยากให้เป็นคน) ช่างคิด ช่างทำ ช่างซักถาม ...

นิด : พี่เอกครับ ผมว่าเมืองใหม่ที่นครนายกนี่คงจะต้องน่าอยู่แน่ๆ ครับ เห็นเขาว่าทั้งไฮเทค ทั้งสะอาด แถมรถก็จะไม่ติดอีกต่างหาก

พี่เอก : แล้วหน่อยว่าไงล่ะครับ?

หน่อย : คิดว่าผู้ใหญ่เขาก็คงจะคิดละเอียดรอบคอบดีแล้วมั้งคะ อีกอย่างก็อยู่ใกล้กรุงเทพฯดี และยังมีน้ำตกให้เที่ยวเยอะแยะด้วย

พี่เอก : อืมม์ ... ที่ว่ามานี่ก็เป็นแง่บวกทั้งนั้นนะ พี่เลยขอคิดในแง่อื่นดูบ้าง แต่ก็ไม่ถึงขั้นมองโลกแง่ร้ายหรอกนะ

หน่อย : มีแง่ลบด้วยหรือคะ เมืองใหม่นี่?

พี่เอก : ที่พี่สงสัยมีสองเรื่องครับ เรื่องแรกเป็นประเด็นทางสังคม ส่วนอีกเรื่องเป็นประเด็นทางวิทยาศาสตร์ ซึ่งจะว่าไปก็มีส่วนที่เกี่ยวข้องนิดๆ กับเรื่องที่เรากำลังคุยกันอยู่เหมือนกันนะ!

นิด : (ตาโต) เอ๊ะ! นครนายกนี่มีอะไรเกี่ยวกับทฤษฎีของไอน์สไตน์ได้ยังไง? ... สงสัย! ... สงสัย!

พี่เอก : เอาเรื่องแรกก่อนก็แล้วกัน คือมีผู้ใหญ่หลายท่านเป็นห่วงเรื่องชุมชนดั้งเดิม คิดดูสิ ถ้าไปเวนคืนที่ดินของชาวบ้านมา แล้วเขาจะไปอยู่ไหนกัน อีกอย่างคำว่า 'เมืองใหม่ ไฮเทค' นี่ คล้ายๆ กับจะบอกว่า คนที่ไปอยู่ต้องมีกะตังค์เยอะนะ คนจนๆ ไม่มีสิทธิ์ ... บางคนถึงกับแซวว่า เมืองใหม่นี่เป็น 'นคร ...ของ ... นายก' และบรรดาเศรษฐีซะล่ะมั้ง!

หน่อย : แบบนี้คนในพื้นที่เขาไม่ออกมาแสดงความคิดเห็นหรือคะ?

พี่เอก : เออ! ยังไม่เคยได้ยินเหมือนกันนะ ก็คงต้องรอดูเหตุการณ์ไปเรื่อยๆ ... ส่วนอีกเรื่องที่มีส่วนเกี่ยวข้องกับวิทยาศาสตร์นี่มีคนออกมาประท้วงแล้ว! รู้ไหมว่าเรื่องอะไร?

นิด & หน่อย : (ส่ายหน้า) ไม่รู้จริงๆ ครับ/ค่ะ ....

พี่เอก : คืออย่างนี้ครับ เมืองใหม่ไฮเทคนี่มีจุดขายข้อหนึ่งคือ สะอาด ปราศจากมลภาวะ ... แต่ปรากฏว่า ที่อำเภอใกล้ๆ กัน คือ อ.องครักษ์ ในนครนายกนี่เองก็มีแผนที่จะสร้างศูนย์วิจัยนิวเคลียร์ ซึ่งมีเครื่องปฏิกรณ์นิวเคลียร์เครื่องใหม่ขนาดใหญ่กว่าที่มีอยู่ในกรุงเทพฯ ซึ่งมีคนออกมาประท้วง เพราะว่า ที่ผ่านมาดูเหมือนจะไม่ค่อยโปร่งใส แต่เรื่องที่พี่คิดว่าสำคัญและไม่ค่อยได้พูดถึงกันก็คือ ที่นี่จะเป็นที่จัดเก็บกากกัมมันตรังสีจากทั่วประเทศอีกด้วย! ... มันก็เลยขัดๆ กับคำว่า 'สะอาด' และ 'ปราศจากมลภาวะ' ยังไงชอบกลอยู่นะ

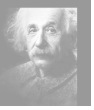
หน่อย : น่าคิดจริงๆ ด้วยค่ะ!

"Science is a won-derful thing if one does not have to earn one's living at it."

Albert Einstein

"วิทยาศาสตร์นั้นเป็นสิ่งที่น่าอัศจรรย์ ถ้าหากเราไม่ต้องใช้มันในการหาเลี้ยงปากท้อง"

อัลเบิร์ต ไอน์สไตน์



พี่เอก : แต่ก็ยังพอมีเวลาพูดคุยกันครับ พี่ว่าลองรับฟังหน่วยงานที่รับผิดชอบ คือ สำนักงานปรมาณูเพื่อสันติ ที่เราเรียกชื่อเดิมจนติดปากว่า สำนักงานพลังงานปรมาณูเพื่อสันติ เขาชี้แจงก่อนดีกว่า แล้วค่อยๆ ปะติดปะต่อเรื่องจากแง่มุมต่างๆ ก่อนตัดสินใจ แต่ตอนนี้เราเรียนรู้ทฤษฎีสัมพัทธภาพกันต่อดีกว่า ... ไหน! พอบอกได้ไหมว่า ที่คุยเรื่องนครนายกนี่มีประเด็นอะไรที่เกี่ยวกับทฤษฎีของไอน์สไตน์บ้าง?

นิด : ผมว่าคำว่า 'นิวเคลียร์' นี่ก็ทำให้คิดถึงไอน์สไตน์แล้วครับ เพราะเห็นชอบพูดกันว่าไอน์สไตน์คิดสูตรระเบิดนิวเคลียร์ อะไรอย่างนี้

หน่อย : แต่ที่พี่เอกพูดถึงนี่ ไม่เห็นมีระเบิดซักกะจิ๊ด มีแต่ เครื่องปฏิกรณ์ และกากกัมมันตรังสี แค่นั้น ไม่ใช่หรือคะ?

พี่เอก : ความจริงทั้งระเบิดและเตาปฏิกรณ์นิวเคลียร์นี่ ใช้หลักการทางฟิสิกส์เดียวกันเลยนะ และก็เกี่ยวพันกับสมการของไอน์สไตน์ ...

นิด : (พูดดังๆ) $E = mc^2$!

พี่เอก : นั่นแหละๆ ... สมการที่เราอ้างถึงบ่อยๆ แต่ยังไม่ได้เจาะลึกซักที

พี่เอกบอกว่าสมการ $E = mc^2$ พิสูจน์ได้หลายวิธี แต่ไหนๆ ก็มาถึงขั้นนี้แล้ว น่าจะรู้วิธีการดั้งเดิมของไอน์สไตน์ดีกว่า จะได้รู้ว่า 'ของแท้' เขาคิดมาได้ยังไง วันหลังถ้าไปเจอวิธีอื่นจะได้นำมาเปรียบเทียบกับวิธีนี้ได้ ... ว่าแล้วก็หยิบหนังสือขนาดเหมาะมือเล่มหนึ่งขึ้นมาชื่อ ***Einstein's Miraculous Year : Five Papers That Changed the Face of Physics*** *(ปีมหัศจรรย์ของไอน์สไตน์ : บทความทั้งห้าที่เปลี่ยนโฉมหน้าฟิสิกส์) ขึ้นมาให้นิดกับหน่อยดู*

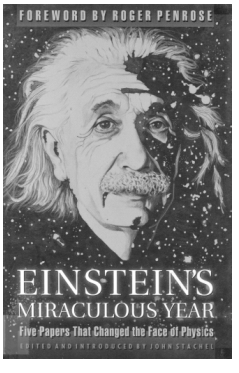
พี่เอก : หนังสือเล่มนี้มหัศจรรย์เหมือนชื่อปกเลยนะ เพราะมีบทความระดับสุดยอดของไอน์สไตน์ทั้งหมดห้าบทความ ซึ่งแปลมาจากเวอร์ชันภาษาเยอรมันที่ตีพิมพ์ในวารสารทางวิชาการชั้นเยี่ยม **Annalen der Physik** โดยบทความที่เกี่ยวกับเราก็คือ บทความที่สาม **"On the Electrodynamics of Moving Bodies"** หรือ "ว่าด้วยอิเล็กโทรไดนามิกส์ของวัตถุซึ่งกำลังเคลื่อนที่" ซึ่งดูเผินๆ อาจจะนึกว่าเกี่ยวกับไฟฟ้าหรืออะไรทำนองนี้ แต่จริงๆ แล้วบทความนี้คือทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษ บทความแรกของโลกนั่นเอง! ส่วนสมการ $E = mc^2$ อยู่ในบทความถัดไปนี่ (ชี้ไปที่บทความที่สี่ ในหนังสือ คือ **"Does the Inertia of a Body Depend on Its Energy Content?"**)

นิด : โอ้โห! สั้นๆ แค่นี้เองรึครับ? แถมมีอยู่แค่ไม่กี่สมการ ... แต่ ... (ชี้นิ้วไล่ไปทุกสมการ) เอ๊ะ! ไม่เห็นมีสมการ $E = mc^2$ เลย!

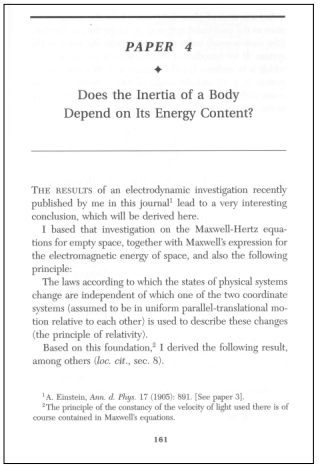
พี่เอก : ครับ ... ก็เพราะไอน์สไตน์ใช้สัญลักษณ์ต่างไปจากปัจจุบัน และไม่ได้เน้นผลลัพธ์นี้มากมายอะไร ดูการตั้งชื่อบทความเป็นคำถามสิ เป็นการนำเสนอแบบถ่อมตัวเพื่อให้คนอื่นพิจารณาด้วยซ้ำ โดยคำว่า "Inertia of a Body" หรือ ความเฉื่อยของวัตถุ ในชื่อบทความก็หมายถึง มวล m ของวัตถุนั่นเอง

หน่อย : ไอน์สไตน์คิดได้ไง ... ซักอยากจะรู้ซะแล้ว!

พี่เอก : ได้เลย ... ได้เลย ... เริ่มต้นไอน์สไตน์ก็อ้างถึงบทความก่อนที่ตีพิมพ์ไปก่อนหน้าเล็กน้อย เจ้า 'อิเล็กโทรไดนามิกส์ของวัตถุซึ่งกำลังเคลื่อนที่' อะไรนั่นแหละ ซึ่งจริงๆ แล้วเป็นทฤษฎี สัมพัทธภาพพิเศษที่ลงไปลึกกว่าที่เรา



หนังสือ Einstein's Miraculous Year จัดพิมพ์โดย Princeton Uni- versity Press (ISBN 0-691-05938-1)



PAPER 4

Does the Inertia of a Body
Depend on Its Energy Content?

THE RESULTS of an electrodynamic investigation recently published by me in this journal[1] lead to a very interesting conclusion, which will be derived here.

I based that investigation on the Maxwell-Hertz equations for empty space, together with Maxwell's expression for the electromagnetic energy of space, and also the following principle:

The laws according to which the states of physical systems change are independent of which one of the two coordinate systems (assumed to be in uniform parallel-translational motion relative to each other) is used to describe these changes (the principle of relativity).

Based on this foundation,[2] I derived the following result, among others (*loc. cit.*, sec. 8).

[1] A. Einstein, *Ann. d. Phys.* 17 (1905): 891. [See paper 3].
[2] The principle of the constancy of the velocity of light used there is of course contained in Maxwell's equations.

161

บทความ "Does the Inertia of a Bo- dy Depend on Its Energy Con- tent?" หรือ "ความเฉื่อยของวัตถุขึ้นกับพลังงานที่มันมีอยู่หรือไม่?" ซึ่งเป็นครั้งแรกที่ไอน์สไตน์ได้แสดงให้โลกเห็นว่า $E = mc^2$

คุยกันมา เพราะนอกจากจะนำเสนอการแปลงแบบลอเรนตซ์ และกลศาสตร์ สัมพัทธภาพ เช่น เรื่องเวลายืดและการรวมความเร็วแล้ว ไอน์สไตน์ยังพิสูจน์ไว้ด้วยว่า ผู้สังเกตสองคนที่อยู่ในกรอบเฉื่อยคนละกรอบจะเห็นว่า แสงมีพลังงานและความถี่ต่างกันอย่างไร ... (พูดไม่ทันจบ)

นิด : อ้าว! ไหงว่า อัตราเร็วของแสงเป็นค่าที่ไม่แปรเปลี่ยนไงล่ะครับ?

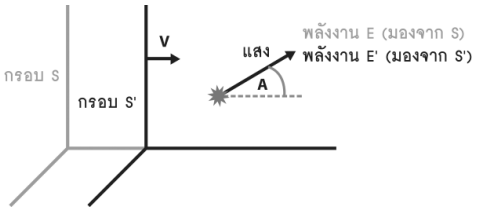
พี่เอก : ใช่แล้ว นั่นเป็นสมมติฐานข้อที่สองของทฤษฎีสัมพัทธภาพเชียวนะ ... แต่สมมติฐานข้อนี้พูดถึงแต่อัตราเร็วของแสงเท่านั้น ไม่ได้รวมไปถึง พลังงาน ความถี่ และความยาวคลื่นของแสง ซะกะหน่อย

หน่อย : แล้วจะจับหลักยังไงละคะทีนี้?

พี่เอก : ยังจำสูตรของคลื่นที่ว่า อัตราเร็ว = ความยาวคลื่น x ความถี่ หรือ v = λf ได้ไหม? ในกรณีของแสงในสุญญากาศ อัตราเร็ว v ก็คือ c นั่นคือ c = λf แต่อัตราเร็วของแสง c มีค่าคงที่เสมอ หมายความว่า ถ้าความถี่ f เพิ่ม ความยาวคลื่น λ ก็ต้องลด หรือกลับกันเพื่อให้ผลคูณมีค่าคงที่เท่ากับ c ไงล่ะ ส่วนความถี่หรือความยาวคลื่นจะเปลี่ยนไปยังไงนั้น ก็มีสูตรที่พิสูจน์ได้โดยใช้การแปลงของลอเรนตซ์นะ ถ้าสนใจก็ลองไปค้นหนังสือเกี่ยวกับทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษในหัวข้อ ปรากฏการณ์ดอปเปลอร์ (Doppler shift หรือ Doppler effect) ดูได้

นิด : คุ้นๆ คำนี้อยู่เหมือนกัน ยังกับเคยเห็นในเรื่องเสียงนี่ละครับ

พี่เอก : ชื่อ 'ดอปเปลอร์' เหมือนกันครับ แต่ความหมายทางกายภาพต่างกันลิบลับ เพราะในเรื่องเสียงนั้น มีตัวกลาง เช่น อากาศหรือน้ำที่เป็นกรอบอ้างอิงสัมบูรณ์ แต่ในเรื่องแสงนั้นเรารู้ตั้งแต่ต้นแล้วว่า ไม่มี หรือ ไม่จำเป็นต้องมี อีเทอร์ ซึ่งเป็นกรอบอ้างอิงสัมบูรณ์ ทำให้สูตรที่ใช้ในการคำนวณว่า ความถี่หรือความยาวคลื่นจะเปลี่ยนแปลงไปอย่างไรเมื่อแหล่งกำเนิดหรือผู้สังเกตเคลื่อนที่ของเสียงและแสงมีหน้าตาแตกต่างกัน แต่เนื่องจากไอน์สไตน์ไม่ได้ใช้ประเด็นนี้ พี่ก็จะขอเลือกเฉพาะเรื่องการเปลี่ยนแปลงพลังงานของแสงแทน โดยจะขอปรับเปลี่ยนสัญลักษณ์บางตัวไปเล็กน้อย แต่คงความหมายเหมือนเดิมนะครับ เช่น ไอน์สไตน์ใช้ตัว V สำหรับอัตราเร็วแสง แต่พี่ขอใช้ตัว c อย่างที่เดี๋ยวนี้ชอบใช้กันเป็นต้น (ชี้ไปที่รูป พร้อมกับอธิบาย)



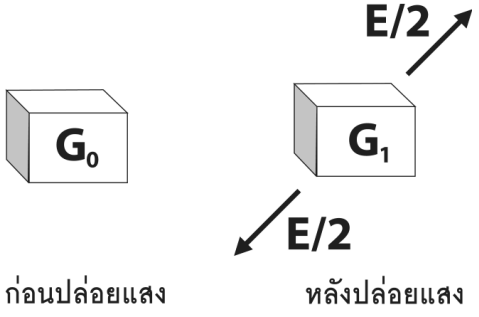
สมมติว่า นิดอยู่ในกรอบ S ส่วนหน่อยอยู่ในกรอบ S' ซึ่งเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว v ไปตามแกน x ของกรอบ S จะพบว่า ถ้านิดเห็นแสงที่วิ่งทำมุม A เมื่อเทียบกับแกน x วิ่งออกไปมีพลังงานเท่ากับ E

หน่อยซึ่งอยู่ในกรอบ S' จะเห็นแสงมีพลังงานเท่ากับ

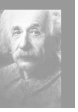
$$E' = E\left[\frac{1 \pm \frac{v}{c}\cos(A)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right] = Ek(1 \pm \frac{v}{c}\cos(A))$$

โดยถ้าแสงวิ่งเข้าหาหน่อย ก็จะเลือกเครื่องหมายบวก (+) เพราะหน่อยจะเห็นว่าแสงมีพลังงานสูงกว่าที่นิดเห็น แต่ถ้าแสงวิ่งออกจากหน่อย ก็จะเลือกเครื่องหมายลบ (–) เพราะว่าหน่อยจะเห็นว่าแสงมีพลังงานต่ำกว่าที่นิดเห็น

ไอน์สไตน์พิสูจน์สมการนี้ไว้แล้วในบทความที่นำเสนอทฤษฎีสัมพัทธภาพพิเศษครับ แต่ถ้าเราอยากลองของพิสูจน์เอง ก็อาจใช้การแปลงแบบลอเรนตซ์ และสมมติฐานโฟตอนที่ว่า E = hf ได้เหมือนกัน แต่หัวใจของการพิสูจน์ $E = mc^2$ อยู่ที่การตีความในช่วงท้ายๆ นะครับ โดยไอน์สไตน์ใช้การทดลองในความคิด (thought experiment) โดยเริ่มอย่างนี้



สมมติว่าในกรอบ S ซึ่งนิดอยู่ มีวัตถุชิ้นหนึ่งซึ่งอยู่นิ่งๆ และมีพลังงาน G_0 ต่อมาวัตถุชิ้นนี้ส่งคลื่นแสงพลังงาน E ออกไป โดยครึ่งหนึ่งไปในทิศที่ทำมุม A กับแกน x ส่วนอีกครึ่งหนึ่งส่งออกไปในทิศตรงกันข้าม หลังจากที่ส่งคลื่นออกไปแล้ว วัตถุนี้ก็ยังคงอยู่นิ่งในกรอบนี้ แต่จะมีพลังงานลดลงเหลือแค่ G_1

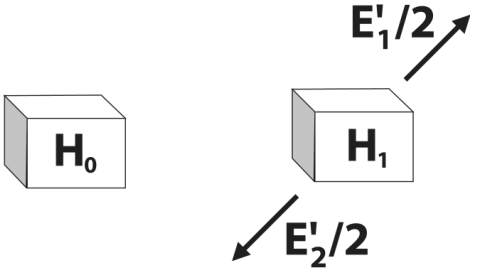


นิดจะบอกว่า ตามหลักการอนุรักษ์พลังงาน

$$G_0 = G_1 + \left(\frac{E}{2}+\frac{E}{2}\right) = G_1 + E$$

เนื่องจากสมการนี้ใช้ได้ในกรอบ S ของนิด ก็จะขอเรียกว่า ***'สมการของนิด'*** *ก็แล้วกัน*

ส่วนหน่อยซึ่งอยู่ในกรอบ S′ จะเห็นเหตุการณ์เดียวกันนี้ แต่ระบุค่าพลังงานต่างออกไป เพราะในมุมมองของหน่อย วัตถุชิ้นนี้กำลังเคลื่อนที่อยู่ ซึ่งถ้าให้ H_0 และ H_1 เป็นพลังงานก่อนและหลังการส่งคลื่นแสงออกไป และคิดผลการเปลี่ยนแปลงพลังงานที่อ้างไว้ก่อนหน้านี้



ก่อนปล่อยแสง **หลังปล่อยแสง**

หน่อยจะบอกได้ว่า

$$H_0 = H_1 + \left(\frac{E_1'}{2}+\frac{E_2'}{2}\right)$$
$$= H_1 + \frac{E}{2}\kappa(1-\frac{v}{c}\cos(A)) + \frac{E}{2}\kappa(1+\frac{v}{c}\cos(A))$$
$$= H_1 + kE$$

ซึ่งต้องเรียกว่า ***'สมการของหน่อย'***

นิด : สมการยุ่งๆ เหลือง่ายนิดเดียวนะครับ แต่ ... เอ ... ยังดูไม่ออกเลยว่า $E = mc^2$ โผล่มาได้ยังไง?

พี่เอก : พอจับ 'สมการของหน่อย' ตั้งแล้วลบด้วย 'สมการของนิด' ก็จะได้สมการง่ายๆ อย่างนี้ครับ

$$(H_0 - G_0) = (H_1 - G_1) + (k-1)E$$

ไอน์สไตน์บอกว่า เนื่องจากเทอม H-G เป็นความแตกต่างของพลังงานของวัตถุนี้ขึ้นกับว่ามองจากกรอบที่วัตถุอยู่นิ่ง (G) หรือกรอบที่วัตถุกำลังวิ่งอยู่ (H) ย่อมแสดงว่า ค่าค่านี้ก็คือ พลังงานจลน์ K ของวัตถุ บวกด้วยค่าคงที่ C เท่านั้น เขียนให้ชัดๆ คือ

ก่อนปล่อยแสงออกไป :
$(H_0 - G_0) = K_0 + C$
หลังปล่อยแสงออกไป :
$(H_1 - G_1) = K_1 + C$
ไหนลองทำต่อดูเองสิครับ

หน่อย : บวกลบง่ายๆ แค่นี้สบายมากค่ะ ก็จับสองสมการหลังนี่แทนเข้าไปในสมการก่อนหน้านี้ ... (นำไปแทน) ... แต่ค่าคงที่ C เหมือนๆ กัน ก็ออกมาอย่างนี้ .... $K_0 = K_1 + (k-1)E$ ... ใช่เปล่าคะ?

พี่เอก : ครับ! แต่ไอน์สไตน์ใช้ศิลปะในการจัดรูปสมการให้เข้าที่เข้าทางเพื่อให้ตีความออกมาได้ง่ายๆ โดยย้ายพลังงานจลน์ไปไว้ด้วยกัน แล้วแทนค่า k ลงไปเต็มๆ อย่างนี้นะครับ

$$K_0 - K_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right]E = \left[(1-\frac{v^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} - 1\right]E$$

จากสมการนี้ จะเห็นว่าเทอมทางขวามือมีค่าเป็นบวกเสมอ ... ลองคิดดูเองนะว่าทำไม ... นั่นคือ ค่า $K_0 > K_1$ หรือ พลังงานจลน์ก่อนปล่อยแสงออกไป K_0 > พลังงานจลน์หลังปล่อยแสงออกไป K_1 ซึ่ง**ไอน์สไตน์ตีความสมการนี้ว่า เมื่อวัตถุปล่อยแสงออกไปแล้ว พลังงานจลน์ของวัตถุนั้นจะลดลงไปเท่ากับเทอมทางขวามือนั่นเอง**

นิด : ดูเหมือนว่าไอน์สไตน์ชอบจัดรูปสมการย้ายเทอมนี้ไปตรงนั้น เทอมนั้นไปตรงโน้น แล้ว 'ตีความ' ออกมาได้เป็นเรื่องเป็นราวอยู่เรื่อยๆ

พี่เอก : ช่างสังเกตดีครับ จริงๆ แล้วต้องพูดว่า นักฟิสิกส์ทฤษฎีเก่งๆ มักจะมี 'เซนส์' (sense) ในการจัดรูปสมการจนสามารถตีความออกมาเป็นภาพง่ายๆ ได้ ในเรื่องอื่นๆ ก็คล้ายกันนะครับ ไม่ใช่เฉพาะทฤษฎีสัมพัทธภาพเท่านั้น ... กลับมากรณีนี้กันต่อ ... ไอน์สไตน์ได้ใช้กลเม็ดเด็ดคำนวณต่ออีกเล็กน้อย ... แต่ก่อนที่จะเปิดเผยกลเม็ดเด็ดที่ว่านี่ ไหนใครลองบอกพี่สิว่าพลังงานจลน์ตามความเข้าใจของเราคืออะไร และคำนวณได้ยังไง?

หน่อย : พลังงานจลน์ก็คือพลังงานของวัตถุซึ่งกำลังเคลื่อนที่ค่ะ คำนวณง่ายๆ ได้จาก $K = 1/2\ mv^2$ โดยที่ m คือ มวล และ v คืออัตราเร็ว

พี่เอก : เชื่อไหมครับ ว่าสูตรง่ายๆ ที่เรารู้จักกันมาตั้งนานแล้วนี่แหละที่ไอน์สไตน์ใช้เป็นส่วนหนึ่งในการพิสูจน์สมการ $E = mc^2$ อันลือลั่น!

นิด : ทำได้ยังไงครับ ก็นี่มันสูตรในกลศาสตร์ของนิวตันที่ใช้ได้เฉพาะในกรณีที่อัตราเร็ว v ต่ำๆ ไม่ใช่เหรอครับ?

พี่เอก : นั่นแหละ ... ตรงประเด็นเลย! ไอน์สไตน์ให้เหตุผลว่า สูตรพลังงานจลน์ยุ่งๆ ที่เขาคิดขึ้นมานั้นเป็นกรณีทั่วไป คือค่า v เท่าไรก็ได้ ตราบเท่าที่ยังต่ำกว่า c แต่สูตรนี้จะต้องลดรูปกลายเป็นสูตรที่ได้จากกลศาสตร์ของนิวตันพอดีเป๊ะ เมื่ออัตราเร็ว v มีค่าน้อยกว่าอัตราเร็วแสงมากๆ

จากการกระจายเป็นอนุกรมอนันต์โดยใช้คณิตศาสตร์เราพบว่า ถ้า $v << c$ เทอม

$$\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1\right]E = \left[\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{v}{c}\right)^4 + \ldots\right) - 1\right]E$$

$$\cong \frac{1}{2}\left(\frac{E}{c^2}\right)v^2$$

เนื่องจากเราสามารถตัดเทอมยกกำลังสี่และเทอมที่เหลือไปได้ เพราะมีค่าน้อยมากเมื่อเทียบกับเทอมยกกำลังสอง

แต่ถ้าเทียบผลลัพธ์นี้กับสูตรพลังงานจลน์ $K = 1/2mv^2$ ก็จะพบว่า เทอมในวงเล็บตรงกลาง ก็คือ มวล m นั่นเอง แสดงว่า

$$\boxed{E = mc^2}$$

ที่เรารู้จักกันดีไงล่ะ!

หน่อย : ดูง่ายจริงๆ ... แต่หน่อยสงสัยว่า สมการนี้ใช้ได้เฉพาะในกรณีที่วัตถุส่งแสงที่มีพลังงาน E ออกไป ตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้ตั้งแต่ต้นเท่านั้นรึเปล่าคะ?

พี่เอก : เรื่องนี้พี่ก็ติดใจเหมือนกันครับ ก็เลยขอยกคำกล่าวของปรมาจารย์ไอน์สไตน์เองมาให้ดูเลยอย่างนี้ (ชี้ไปที่บทความและแปล โดยบอกว่าในต้นฉบับนั้นไอน์สไตน์ใช้สัญลักษณ์ L แทนพลังงานของแสงที่เราเรียกว่า E และใช้ V แทนอัตราเร็วแสงที่เราเรียกว่า c)

"If a body emits the energy E in the form of radiation, its mass decreases by E/c^2. Here it is obviously inessential that the energy taken from the body turns into radiant energy, so we are led to the more general conclusion: The mass of a body is a measure of its energy content; if the energy changes by E, the mass changes in the same sense by $E/9x10^{20}$ if the energy is measured in ergs and the mass in grams."

ถอดความได้อย่างนี้ครับ

"ถ้าหากวัตถุส่งพลังงาน E ออกไปในรูปของการแผ่รังสี มวลของมันจะลดลงเท่ากับ E/c^2 ในที่นี้จะเห็นได้ชัดว่าพลังงานที่ออกจากวัตถุนี้ไม่จำเป็นต้องกลายเป็นพลังงานของรังสีเสมอไป ดังนั้น เราจึงได้ข้อสรุปในกรณีทั่วไปว่า มวลของวัตถุเป็นปริมาณที่ใช้วัดค่าพลังงานของวัตถุนั้น ถ้าหากพลังงานเปลี่ยนไปเท่ากับ E มวลก็จะเปลี่ยนไปในลักษณะเดียวกันเท่ากับ $E/9x10^{20}$ ถ้าพลังงานมีหน่วยเป็นเอิร์กและมวลมีหน่วยเป็นกรัม"

นิด : ไอน์สไตน์นี่แน่จริงๆ นะครับ ใช้กรณีเฉพาะหาความสัมพันธ์ของสิ่งต่างๆ แล้วสามารถสรุปเป็นกรณีทั่วไปออกมาได้

พี่เอก : อย่างที่บอกว่า นักฟิสิกส์เก่งๆ มักจะมี 'เซนส์' ที่ดีนะครับ ส่วนในกรณีของไอน์สไตน์นี่ต้องเรียกว่ามี 'ซูเปอร์เซนส์' เหมือนกับที่นายกฯ คนเก่งของเราเป็น 'ซูเปอร์ CEO' ล่ะมั้งครับ! ;–)

A. Einstein